TRẦN VĂN HẠO
(Chủ biên)

NGUYỄN CAM
NGUYỄN MỘNG HY
TRẦN ĐỨC HUYÊN
CAM DUY LỄ
NGUYỄN SINH NGUYÊN
NGUYỄN VŨ THANH

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI VÀO ĐẠI HỌC

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TRẦN VĂN HẠO (Chủ biên)
NGUYỄN CAM - NGUYỄN MỘNG HY - TRẦN ĐỨC HUYÊN
CAM DUY LỄ - NGUYỄN SINH NGUYÊN - NGUYỄN VŨ THANH

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI VÀO ĐẠI HỌC

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

BIÊN SOẠN THEO CHƯƠNG TRÌNH TOÁN THPT NÂNG CAO HIỆN HÀNH

(Tái bản lần thứ sáu có chỉnh lí và bổ sung)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

114-2010/CXB/176-129/GD

Mã số : PTK24t0 - LKT

Lời nói đầu

Bộ sách **Chuyên đề luyện thi vào Đại học** được biên soạn nhằm mục đích giúp các em học sinh lớp 12 có thêm tài liệu tham khảo, nắm vững phương pháp giải các dạng bài toán cơ bản, thường gặp trong các kì thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng hàng năm.

Nội dung bộ sách bám sát theo chương trình bộ môn Toán THPT nâng cao hiện hành và Hướng dẫn ôn tập thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng môn Toán của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Bộ sách gồm 7 tập, tương ứng với 7 chuyên đề :

1. Đại số
2. Lượng giác
3. Hình học không gian
4. Hình học giải tích
5. Giải tích - Đại số tổ hợp
6. Khảo sát hàm số
7. Bất đẳng thức

Tập sách **"Chuyên đề luyện thi vào Đại học : Hình học không gian"** này, gồm 2 phần :

Phần I : Kiến thức cơ bản – Ví dụ áp dụng : gồm 5 chương thuộc phần Hình học không gian. Mỗi chương gồm nhiều đơn vị kiến thức (§). Mỗi (§) được biên soạn thống nhất gồm các mục :

A. Kiến thức cơ bản : Tóm tắt, hệ thống kiến thức trọng tâm.

B. Ví dụ áp dụng : gồm nhiều ví dụ có hướng dẫn giải. Mỗi ví dụ là một dạng bài tập cơ bản, thường gặp (hoặc đã ra) trong các đề thi tuyển sinh Đại học.

C. Luyện tập : gồm nhiều bài tập, giúp học sinh tự rèn luyện kĩ năng giải toán.

Phần II : Ôn tập – Hướng dẫn giải – đáp số : gồm phần ôn tập tổng hợp (Bài tập tự luận và bài tập trắc nghiệm) và phần hướng dẫn giải, đáp số cho các bài luyện tập của các (§).

Phụ lục : Trích giới thiệu một số đề thi tuyển sinh Đại học (2005 – 2010). Đây là phần trích giới thiệu một số đề thi tuyển sinh Đại học đã ra từ 2005 đến 2010 – môn Toán, có liên quan đến phần Hình học không gian, có hướng dẫn giải ; giúp học sinh làm quen với các dạng câu hỏi của đề thi tuyển sinh Đại học.

Tập thể tác giả trân trọng giới thiệu với các em học sinh 12 bộ sách **Chuyên đề luyện thi vào Đại học.** Chúng tôi tin tưởng bộ sách này sẽ góp phần giúp các em học sinh 12 nâng cao chất lượng học tập và đạt được kết quả mĩ mãn trong kì thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng.

Chủ biên

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CẤU TRÚC ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC CAO ĐẲNG 2009, MÔN TOÁN(*)

II. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7 ĐIỂM)

Câu I (3 điểm) :

– Khao sát, vẽ đồ thị của hàm số.

– Các bài toán liên quan đến ứng dụng cua đạo hàm và đồ thị cua hàm số : chiều biến thiên của hàm số. Cực trị. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số. Tiếp tuyến, tiệm cận (đứng và ngang) của đồ thị hàm số. Tìm trên đồ thị những điểm có tính chất cho trước, tương giao giữa hai đồ thị (một trong hai đồ thị là đường thẳng) ;...

Câu II (2 điểm) :

– Phương trình, bất phương trình ; hệ phương trình đại số ;

– Công thức lượng giác, phương trình lượng giác.

Câu III (1 điểm) :

– Tìm giới hạn

– Tìm nguyên hàm, tính tích phân

– Ứng dụng của tích phân: tính diện tích hình phẳng, thể tích khối tròn xoay.

Câu IV (1 điểm) :

Hình học không gian (tổng hợp) : Quan hệ song song, quan hệ vuông góc của đường thẳng, mặt phẳng. Tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay, hình trụ tròn xoay ; tính thể tích khối lăng trụ, khối chóp, khối nón tròn xoay, khối trụ tron xoay ; tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.

Câu V (1 điểm) :

Bài toán tông hợp.

II. PHẦN RIÊNG (3 ĐIỂM) :

Thí sinh chỉ được làm một trong 2 phần (phần 1 hoặc 2)

1. Theo chương trình chuẩn :

Câu VI.a (2 điểm) :

Nội dung kiến thức : Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng và trong không gian :

(*) Theo tài liệu của Bộ Giáo dục và Đào tạo công bố năm 2009

– Xác định toạ độ của điểm, vectơ.

– Đường tròn, elip, mặt cầu.

– Viết phương trình mặt phẳng, đường thẳng.

– Tính góc ; tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng. Vị trí tương đối của đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu.

Câu VII. a (1 điểm) :

Nội dung kiến thức :

– Số phức

– Tổ hợp, xác suất, thống kê.

– Bất đẳng thức. Cực trị của biểu thức đại số.

2. Theo chương trình nâng cao :

Câu VI.b (2 điểm) :

Nội dung kiến thức :

Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng và trong không gian :

– Xác định toạ độ của điểm, vectơ.

– Đường tròn, ba đường cônic, mặt cầu.

– Viết phương trình mặt phẳng, đường thẳng.

– Tính góc ; tính khoảng cách từ điểm đến đường thẳng, mặt phẳng; khoang cách giữa hai đường thẳng. Vị trí tương đối của đường thẳng, mặt phăng và mặt cầu.

Câu VII.b (1 điểm) :

Nội dung kiến thức :

– Số phức

– Đồ thị hàm phân thức hữu tỉ dạng $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ và một số yếu tố liên quan.

– Sự tiếp xúc của hai đường cong.

– Hệ phương trình mũ và lôgarit.

– Tổ hợp, xác suất, thống kê.

– Bất đẳng thức. Cực trị của biểu thức đại số.

Phần I.

KIẾN THỨC CƠ BẢN – VÍ DỤ ÁP DỤNG

Chương 1.

ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

§ 1. CÁC TIÊN ĐỀ, VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẲNG HÌNH CHÓP VÀ THIẾT DIỆN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Các tiên đề của hình học không gian

Tiên đề 1. Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

Tiên đề 2. Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Tiên đề 3. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có một số điểm chung khác nữa.

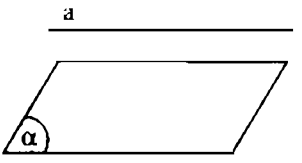
Tiên đề 4. Có ít nhất bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

2. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

a) Đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) :

$a // (\alpha) \Leftrightarrow a \cap (\alpha) = \varnothing$

(Hình 1)

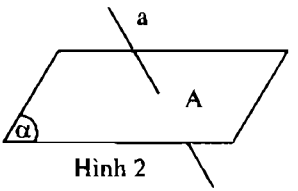


Hình 1

b) Đường thẳng a cắt mặt phẳng (α) :

$a \text{ cắt } (\alpha) \Leftrightarrow a \cap (\alpha) = \{A\}$

(Hình 2)

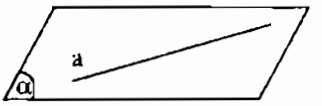


Hình 2

c) Đường thẳng a thuộc mặt phẳng (α) :

$a \subset (\alpha) \Leftrightarrow a \cap (\alpha) = a$

(Hình 3)



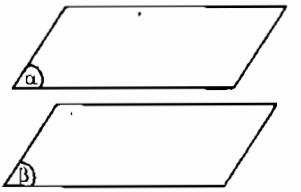
Hình 3

3. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

a) Mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β) :

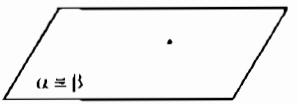
$(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow (\alpha) \cap (\beta) = \varnothing$

(Hình 4)



Hình 4

b) Mặt phẳng (α) trùng với mặt phẳng (β) : (Hình 5)

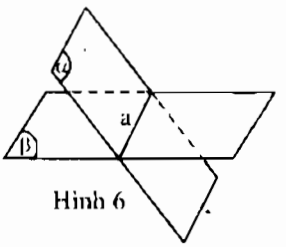


Hình 5

c) Mặt phẳng (α) cắt mặt phẳng (β) :

(α) cắt (β) $\Leftrightarrow (\alpha) \cap (\beta) = a$

(Hình 6)



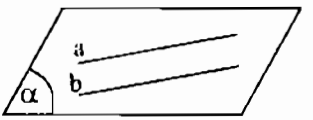
Hình 6

4. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

a) Đường thẳng a song song với đường thẳng b :

$$a // b \Leftrightarrow \begin{cases} a \subset \alpha,\ b \subset \alpha \\ a \cap b = \varnothing \end{cases}$$

(Hình 7)

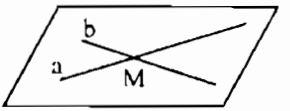


Hình 7

b) Đường thẳng a cắt đường thẳng b (a, b đồng phẳng) :

a cắt b $\Leftrightarrow a \cap b = \{M\}$

(Hình 8)

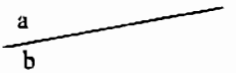


Hình 8

c) Đường thẳng a trùng với đường thẳng b :

$a \equiv b \Leftrightarrow a \cap b = a$ (hoặc b)

(Hình 9)



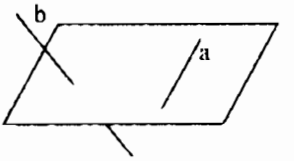
Hình 9

www.VNMATH.com

d) Đường thẳng a chéo với đường thẳng b :

a chéo b $\Leftrightarrow$ a, b không đồng phẳng.

(Hình 10)



Hình 10

5. Cách xác định một mặt phẳng

Có 4 cách sau đây :

a) Biết ba điểm A, B, C không thẳng hàng của mặt phẳng và khi đó ta kí hiệu mặt phẳng (ABC) hoặc mp(ABC) hoặc (ABC).

b) Biết một điểm A và một đường thẳng d không chứa A của mặt phẳng. Khi đó ta kí hiệu mặt phẳng (A, d) hoặc mp(A, d).

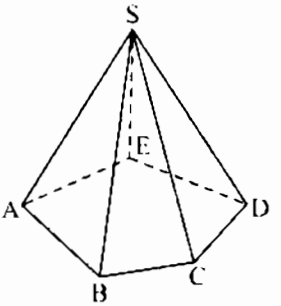
c) Biết hai đường thẳng cắt nhau a, b của mặt phẳng và kí hiệu là mặt phẳng (a, b) hay mp(a, b).

d) Biết hai đường thẳng song song a, b của mặt phẳng và kí hiệu là mặt phẳng (a, b) hay mp(a, b).

6. Hình chóp

a) Định nghĩa :

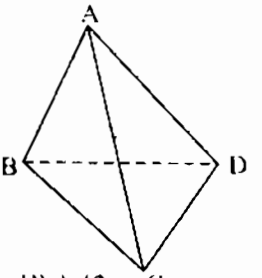
Hình chóp là hình đa diện có một mặt là đa giác, các mặt còn lại đều là những tam giác có chung một đỉnh.



Hình 11

Thí dụ trên hình 11 ta có hình chóp ngũ giác S. ABCDA. Điểm S là *đỉnh*, đa giác ABCDE là *mặt đáy*, các tam giác SAB, SBC, SCD, ... gọi là các *mặt bên*, các đoạn SA, SB, SC, ... gọi là các *cạnh bên*, các đoạn AB, BC, ... gọi là các *cạnh đáy*.

Tuỳ theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... ta gọi theo thứ tự là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, ...



Hình 12

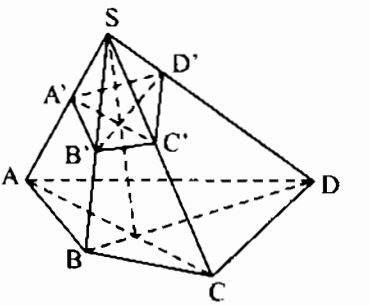
Người ta còn gọi hình chóp tam giác là *hình tứ diện* (hay *tứ diện*). Như vậy, một tứ diện ABCD có thể gọi là hình chóp tam giác bằng bốn cách khác nhau với đỉnh là một trong bốn điểm A, B, C, D. (Hình 12)

www.VNMATH.com

Hình tứ diện có bốn mặt là bốn tam giác đều gọi là *hình tứ diện đều*.

b) Thiết diện của hình chóp :

Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) là một đa giác phẳng tạo bởi các đoạn giao tuyến của (α) với các mặt bên và mặt đáy của hình chóp (có thể không cắt hết các mặt này). Trên hình 13 mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD của hình chóp S.ABCD lần lượt tại A', B', C' D'. Tứ giác phẳng A'B'C'D' là thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (α).



Hình 13

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Dạng 1. SỬ DỤNG CÁC TIÊN ĐỀ VÀ XÉT VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẲNG

Ví dụ 1 : Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng (theo tiên đề 4).

a) Điểm D thuộc những mặt phẳng nào ?

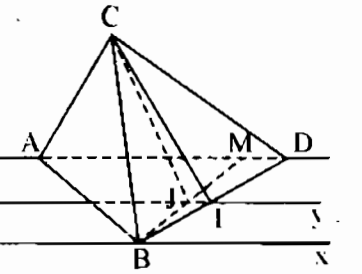
b) Chứng minh AC và BD chéo nhau.

c) Gọi Bx là đường thẳng đi qua B và song song với đường thẳng AD, $M \in AD$. Gọi J là trung điểm của đoạn BM. Nếu điểm M di động trên đường thẳng AD, điểm B di động trên đường thẳng Bx, chứng minh rằng khi đó đường thẳng CJ luôn luôn nằm trong mặt phẳng cố định.

Hướng dẫn giải

a) Điểm D thuộc các mặt phẳng (DAC), (DBC), (DAB). (H.14)

b) Nếu AC và BD không chéo nhau thì chúng cùng nằm trong một mặt phẳng. Mặt phẳng này chứa ba điểm A, B, D không thẳng hàng, đó chính là mặt phẳng (DAB). Như vậy điểm C thuộc mặt phẳng (DAB) là trái với giả thiết (bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng). Do đó AC và BD chéo nhau.



Hình 14

www.VNMATH.com

c) Đường thẳng Jy đi qua trung điểm I của đoạn BD và song song với AD là đường thẳng cố định. Bởi vậy đường thẳng CJ luôn luôn nằm trong mặt phẳng cố định (C, Jy) khi M di động trên đường thẳng AD và B di động trên đường thẳng Bx.

Ví dụ 2 : Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau. Trên a ta lấy hai điểm phân biệt A, B và trên b ta lấy hai điểm phân biệt C, D.

a) Chứng minh AC và BD chéo nhau.

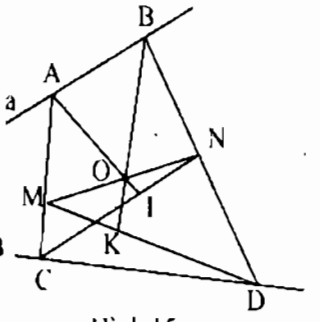
b) Gọi M là một điểm trên đoạn AC, N là một điểm trên đoạn BD. Khi đó đường thẳng MN có thể song song với AB hoặc CD được không ?

c) Gọi O là một điểm trên đoạn MN. Chứng minh rằng AO cắt CN và BO cắt DM.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử AC và BD không chéo nhau và chúng cùng nằm trong một mặt phẳng. Mặt phẳng này chứa cả bốn điểm A, B, C, D. Từ đó ta suy ra hai đường thẳng a, b đồng phẳng là trái với giả thiết (a, b chéo nhau). Vậy AC và BD chéo nhau (Hình 15).

b) Nếu MN // AB ta suy ra AM và BN đồng phẳng, do đó AC và BD đồng phẳng. Điều này trái với kết quả của câu a). Vậy MN không thể song song với AB. Lập luận tương tự ta chứng minh được MN không thể song song với CD.



Hình 15

c) Trong mặt phẳng (ACN) đường thẳng AO không song song với CN nên cắt CN tại I. Trong mặt phẳng (BMD) đường thẳng BO không song song với MD nên cắt MD tại K (Hình 15).

Ví dụ 3 : Cho mặt phẳng (α) xác định bởi đường thẳng a và một điểm A không thuộc a. Gọi a' là đường thẳng qua điểm A và song song với a. Lấy một điểm M trên a và một điểm B nằm ngoài mặt phẳng (α).

a) Chứng minh điểm M thuộc mặt phẳng (α).

b) Tìm điểm chung của các cặp mặt phẳng (ABM) và (α), (ABM) và (a', B) (ABM) và (a, B).

c) Tìm điểm chung của ba mặt phẳng (α), (a', B), (ABM).

d) Gọi I, K lần lượt là các trung điểm của các đoạn thẳng AB và MB. Chứng minh IK song song với mặt phẳng (α).

www.VNMATH.com

Hướng dẫn giải

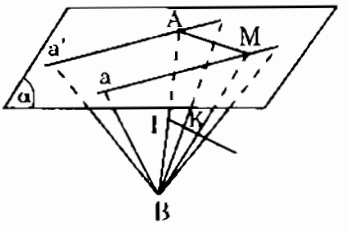
a) Điểm $M \in a \subset mp(\alpha) \Rightarrow M \in mp(\alpha)$

b) $AM = mp(ABM) \cap mp(\alpha)$; $AB = mp(ABM) \cap mp(a', B)$

$BM = mp(ABM) \cap mp(a, B)$ (Hình 16)

c) A là điểm chung của ba mặt phẳng (α), (a', B), (ABM).

d) Ta có IK // AM vì IK là đường trung bình của tam giác BAM và IK không thuộc (α). Nếu $IK \subset mp(\alpha)$ thì điểm B cũng thuộc (α) là điều trái với giả thiết. Vậy IK thuộc mặt phẳng (BAM) và không có điểm chung với (α) nên IK // (α).



Hình 16

Ví dụ 4 : Gọi (α) là mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng a, b cắt nhau tại O và c là một đường thẳng cắt (α) tại I khác O.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (O, c).

b) Gọi M là một điểm trên c và không trùng với I. Tìm giao tuyến m của hai mặt phẳng (M, a) và (M, b). Chứng minh rằng khi M di động trên đường thẳng c giao tuyến m này luôn luôn nằm trong một mặt phẳng cố định.

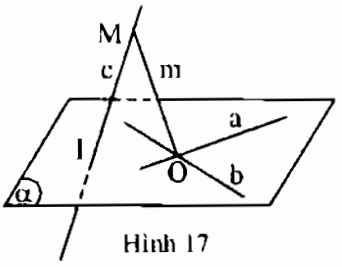
Hướng dẫn giải

a) Hai mặt phẳng (α) và (O, c) có hai điểm chung là O và I. Do đó : $OI = (\alpha) \cap (O, c)$ (Hình 17)

b) Ta có :

$MO = (M, a) \cap (M, b) = m$.

Giao tuyến m của hai mặt phẳng (M, a) và (M, b) luôn luôn nằm trong mặt phẳng (O, c) cố định.



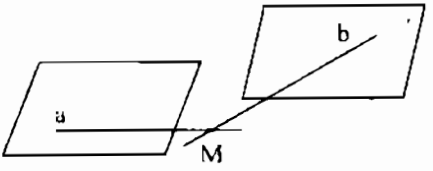
Hình 17

Dạng 2. TÌM GIAO ĐIỂM CỦA HAI MẶT PHẲNG

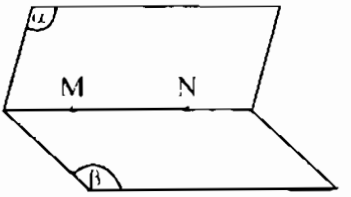
Phương pháp

– Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng. Ta thường tìm hai đường thẳng a, b đồng phẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và giao điểm M (nếu có) của hai đường thẳng này chính là một điểm chung của hai mặt phẳng. (Hình 18)

www.VNMATH.com



Hình 18



Hình 19

– Muốn xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) ta cần tìm hai điểm chung của (α) và (β) là M và N. Đường thẳng MN là giao tuyến cần tìm (Hình 19).

Ví dụ 1 : Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Gọi K là một điểm lấy trên cạnh BD sao cho BK = 3KD.

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNK) với mặt phẳng (BCD)

b) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNK) với mặt phẳng (ACD).

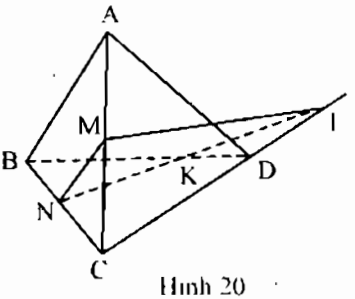
Hướng dẫn giải

a) Mặt phẳng (BCD) và mặt phẳng (MNK) có N và K là hai điểm chung. Do đó : NK = mp(MNK) ∩ mp(BCD).

b) Đường thẳng CD cắt mặt phẳng (MNK) tại I với I = NK ∩ CD.

Vậy mặt phẳng (MNK) và mặt phẳng (ACD) có hai điểm chung là M và I. Do đó

MI = mp(MNK) ∩ mp(ACD). (Hình 20)



Hình 20

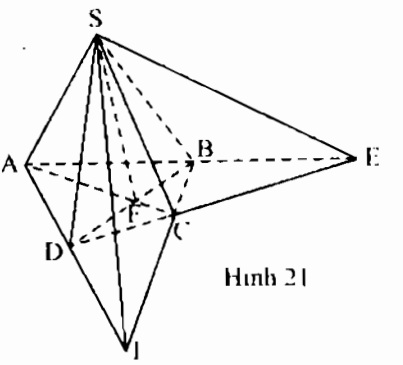
Ví dụ 2 : Cho hình chóp S.ABCD với đáy ABCD là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song. Tìm giao điểm của các cặp mặt phẳng :

a) (SAC) và (SBD) ;

b) (SAB) và (SCD), (SAD) và (SCD).

Hướng dẫn giải

a) Gọi E = AB ∩ DC ; F = AC ∩ BD ; I = AD ∩ BC (Hình 21). Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) có S và F là hai điểm chung. Vậy chúng có giao tuyến là SF = mp(SAD) ∩ mp(SBD).



Hình 21

www.VNMATH.com

b) Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có hai điểm chung là S và E. Vậy chúng có giao tuyến là :

$$SE = mp(SAB) \cap mp(SCD).$$

Lập luận tương tự ta có :

$$SI = mp(SAD) \cap mp(SBC).$$

Ví dụ 3 : Cho hình chóp S.ABCD với đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn BC, CD, SO. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng (SAB), (SAD), (SBC) và (SCD).

Hướng dẫn giải

Đường thẳng MN cắt AB tại I và cắt AD tại G.

Gọi E là giao điểm của MN và AC. Kéo dài EP cắt SA tại K. Ta có I, K là hai điểm chung của hai mặt phẳng (MNP) và (SAB). Do đó :

$$IK = mp(MNP) \cap mp(SAB)$$ (Hình 22)

Lập luận tương tự ta có GK là giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SAD) :

$$GK = mp(MNP) \cap mp(SAD)$$

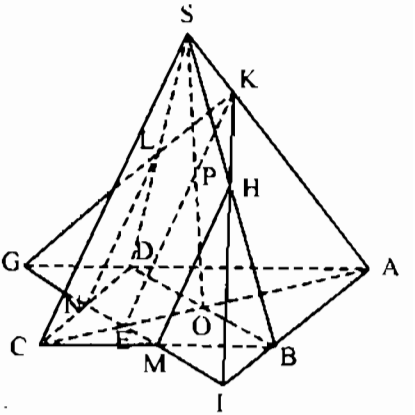
Đường thẳng IK cắt SB tại H. Hai mặt phẳng (MNP) và (SBC) có hai điểm chung là H và M. Do đó :

$$MH = mp(MNP) \cap mp(SBC).$$

Tương tự KG cắt SD tại L. Ta có L, N là hai điểm chung của mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng (SCD). Do đó :

$$LN = mp(MNP) \cap mp(SCD).$$

Ta được thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNP) là hình ngũ giác MNLKH (Hình 22).



Hình 22

Ví dụ 4 : Cho tứ diện ABCD. Cho O là một điểm thuộc miền trong của tam giác BCD và M là một điểm trên đoạn AO.

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MCD) với các mặt phẳng (ABC) và (ABD) ;

b) Gọi I, K là hai điểm lần lượt lấy trên BC và BD. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (IKM) với các mặt phẳng (ACD), (ABC) và (ABD).

www.VNMATH.com

Hướng dẫn giải

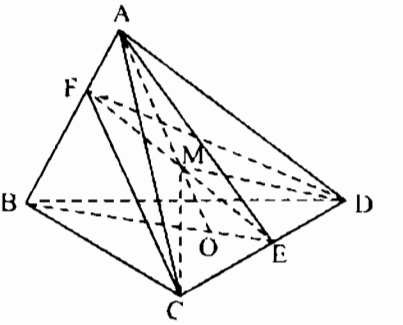
a) Gọi E = BO ∩ CD. Nối EM cắt AB tại F, ta có F ∈ mp(MCD). Mặt khác F ∈ mp(ABC) và F ∈ mp(ABD).

Hai mặt phẳng (MCD) và (ABC) có hai điểm chung là C và F. Do đó :

CF = mp(MCD) ∩ mp(ABC).

Hai mặt phẳng (MCD) và (ABD) có hai điểm chung là D và F. Do đó :

DF = mp(MCD) ∩ mp(ABD) (Hình 23).



Hình 23

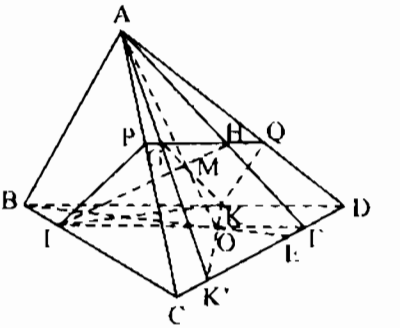
b) Gọi I' = IO ∩ CD và K' = KO ∩ CD. Trong mặt phẳng (AIO) gọi H = IM ∩ AI' và trong mặt phẳng (AKO) gọi G = KM ∩ AK', ta có H và G là hai điểm chung của mặt phẳng (IKM) và mặt phẳng (ACD). Do đó :

GH = mp(IKM) ∩ mp(ACD)

Gọi P = GH ∩ AC ; Q = GH ∩ AD. Hai mặt phẳng (IKM) và (ABC) có I và P là hai điểm chung nên : IP = mp(IKM) ∩ mp(ABC)

Hai mặt phẳng (IKM) và (ABD) có K và Q là hai điểm chung nên :

KQ = mp(IKM) ∩ mp(ABD) (Hình 24).



Hình 24

Ví dụ 5 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD. Lấy một điểm P trên cạnh SC sao cho SP = 3PC. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt (SAC), (SAB), (SAD) và (ABCD) của tứ diện.

Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD.

Ta có O = AC ∩ BD.

Gọi I = SO ∩ MN.

Trong mặt phẳng (SAC) đường thẳng PI cắt SA tại Q. (Hình 25). Do đó :

www.VNMATH.com

$mp(MNP) \cap mp(SAC)$ PQ

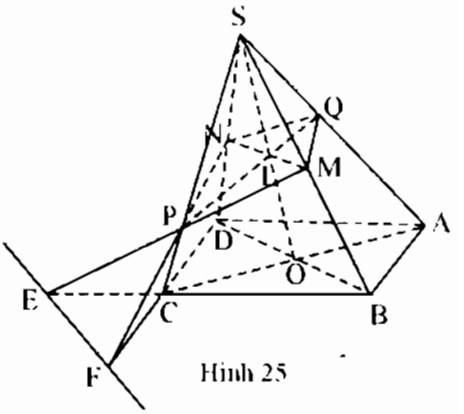
$mp(MNP) \cap mp(SAB)$ MQ

$mp(MNP) \cap mp(SAD) = NQ$

Gọi $E = BC \cap MP$; $F = CD \cap NP$.

Ta có E, F là hai điểm chung của mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng đáy (ABCD). Do đó :

$EF = mp(MNP) \cap mp(ABCD)$ (Hình 25).

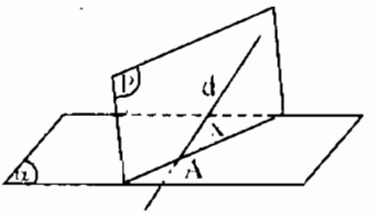


Hình 25

Dạng 3. TÌM GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Phương pháp

Muốn tìm giao điểm A của đường thẳng d với mặt phẳng (α), ta cần khéo léo chọn một mặt phẳng (P) chứa d sao cho giao tuyến x của (P) và (α) dễ xác định. Trong mặt phẳng (P) này, đường thẳng x cắt d tại điểm A (nếu có), đó chính là giao điểm cần tìm. (Hình 26)



Hình 26

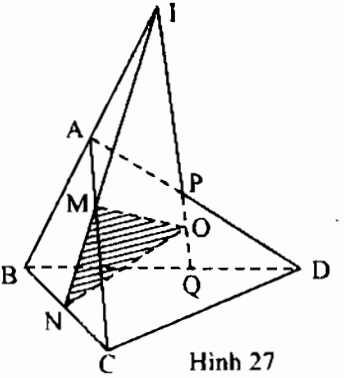
Như vậy bài toán tìm giao điểm của một đường thẳng với một mặt phẳng lại có liên quan mật thiết với bài toán tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (tìm giao tuyến x của (P) và (α)).

Ví dụ 1 : Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt lấy trên các cạnh AC và BC sao cho MN không song song với AB. Gọi O là một điểm thuộc miền trong của tam giác ABD. Tìm giao điểm của AB và AD với mặt phẳng (OMN).

Hướng dẫn giải

Trong mặt phẳng (ABC), đường thẳng MN cắt AB tại I. Vậy ta có I là giao điểm của AB với mặt phẳng (OMN). Trong mặt phẳng (ABD) đường thẳng IO cắt AD, BD lần lượt tại P và Q. Vậy P là giao điểm của AD với mặt phẳng (OMN) (Hình 27).

www.VNMATH.com



Hình 27

Ví dụ 2 : Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M là một điểm trên cạnh SC.

a) Tìm giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD).

b) Lấy một điểm N trên cạnh BC. Tìm giao điểm của SD và mặt phẳng (AMN).

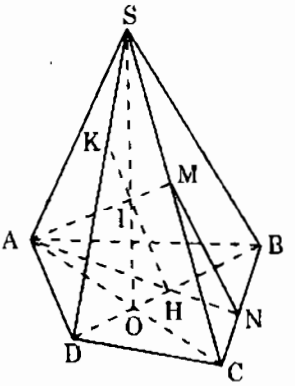
Hướng dẫn giải

a) Ta chọn mặt phẳng (SAC) chứa AM, cần tìm giao tuyến của mặt phẳng này với mặt phẳng (SBD).

Gọi O = AC ∩ BD, ta có SO = mp(SAC) ∩ mp(SBD).

Trong mặt phẳng (SAC), giao tuyến SO cắt AM tại I. Vậy I ∈ AM và I ∈ SO ⊂ (SBD), do đó I ∈ (SBD). Ta suy ra :

I = AM ∩ mp(SBD) (Hình 28).



Hình 28

b) Ta chọn mặt phẳng (SBD) chứa SD và tìm giao tuyến của nó với mặt phẳng (AMN). Gọi H = BD ∩ AN. Ta có HI là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (SBD). Trong mặt phẳng (SBD) giao tuyến HI cắt SD tại K. Vậy K là giao điểm cần tìm.

K = SD ∩ mp(AMN).

Ví dụ 3 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SC.

a) Tìm giao điểm I của đường thẳng AM với mặt phẳng (SBD). Chứng minh rằng IA = 2IM.

www.VNMATH.com

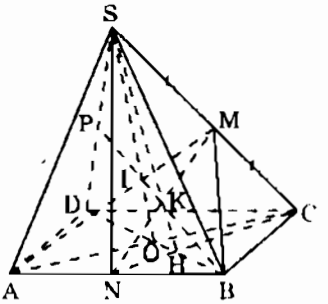
b) Tìm giao điểm P của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM).

c) Gọi N là một điểm tuỳ ý trên cạnh AB. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SBD).

Hướng dẫn giải

a) Mặt phẳng (SAC) chứa AM cắt mặt phẳng (SBD) theo giao tuyến SO trong đó O = AC ∩ BD. Ta có : I = AM ∩ SO nên I = AM ∩ mp(SBD).

Đối với tam giác SAC ta có AM và SO là hai đường trung tuyến nên I là trọng tâm của tam giác đó. Do đó AI = 2IM (Hình 29).



Hình 29

b) Mặt phẳng (SBD) chứa SD cắt mặt phẳng (ABM) theo giao tuyến BI vì B và I đều là các điểm chung của hai mặt phẳng đó. Trong mặt phẳng (SBD) đường thẳng SD cắt BI tại P. Do đó :

$$P = SD \cap mp(ABM)$$

c) Mặt phẳng (SCN) chứa MN cắt mặt phẳng (SBD) theo giao tuyến SH, trong đó H = NC ∩ BD. Trong mặt phẳng (SCN) đường thẳng MN cắt SH tại K. Do đó :

$$K = MN \cap mp(SBD) \text{ (Hình 29)}$$

Ví dụ 4 : Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N là hai điểm lần lượt lấy trên AC và AD. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Tìm giao điểm của :

a) MN và mặt phẳng (ABG) ; b) AG và mặt phẳng (BMN).

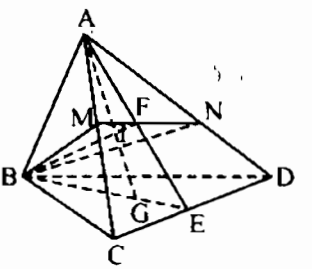
Hướng dẫn giải

a) Gọi E = BG ∩ CD.

Mặt phẳng (ACD) chứa MN cắt (ABG) theo giao tuyến AE mà AE cắt MN tại F. Do đó : F = MN ∩ mp(ABG) (Hình 30).

b) Mặt phẳng (ABE) chứa AG cắt (BMN) theo giao tuyến BF mà AG cắt BF tại I. Vậy AG cắt mặt phẳng (BMN) tại I hay :

$$I = AG \cap mp(BMN) \text{ (Hình 30).}$$



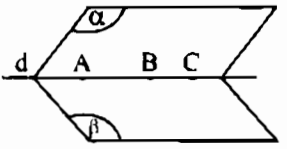
Hình 30

www.VNMATH.com

Dạng 4. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG. CHỨNG MINH BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

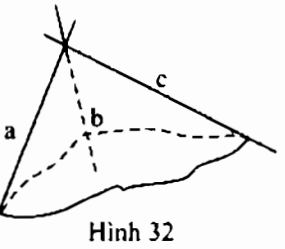
Phương pháp

– Muốn chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng ta chứng minh A, B, C là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β). Như vậy A, B, C thuộc đường thẳng d = (α) ∩ (β) (Hình 31).



Hình 31

– Muốn chứng minh ba đường thẳng a, b, c đồng quy ta chứng minh hai trong ba đường đó cắt nhau và giao điểm của chúng nằm trên đường thẳng còn lại (Hình 32).



Hình 32

Ví dụ 1 : Cho hình chóp S.ABC. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C' sao cho B'C' cắt BC tại D, C'A' cắt CA tại E, A'B' cắt AB tại F. Chứng minh ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

$D \in BC \Rightarrow D \in mp(ABC)$

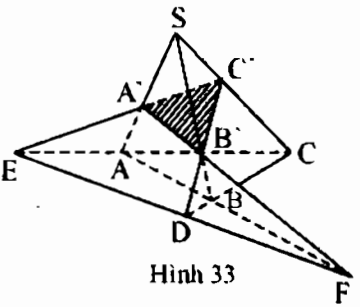
$D \in B'C' \Rightarrow D' \in mp(A'B'C')$

Do đó : $D \in mp(ABC) \cap mp(A'B'C')$

Tương tự, $E \in mp(ABC) \cap mp(A'B'C')$

$F \in mp(ABC) \cap mp(A'B'C')$

Vậy ba điểm D, E, F thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (A'B'C') nên chúng thẳng hàng.



Hình 33

Ví dụ 2 : Cho hình chóp S.ABCD. Gọi I, K là hai điểm cố định trên SA và SC với SI = 2IA và $SK = \frac{1}{3}KC$. Một mặt phẳng (α) quay quanh IK cắt SB tại M và SD tại N. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

www.VNMATH.com

a) Chứng minh rằng ba đường thẳng IK, MN, SO đồng quy. Từ đó suy ra cách dựng điểm N khi biết điểm N.

b) Gọi E = AD ∩ BC và F = IN ∩ MK. Chứng minh rằng ba điểm S, E, F thẳng hàng.

c) Gọi P = IN ∩ AD và Q = MK ∩ BC. Chứng minh rằng khi α thay đổi đường thẳng PQ luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

a) Gọi L = IK ∩ MN, ta có : L ∈ mp(SAC) vì IK ⊂ mp(SAC) ;

L ∈ mp(SBD) vì MN ⊂ mp(SBD) ; SO = mp(SAC) ∩ mp(SBD).

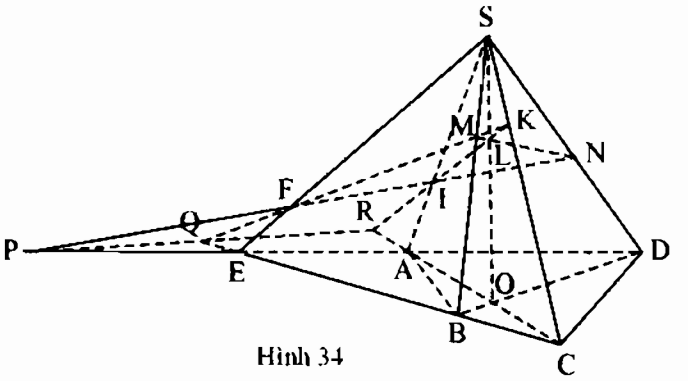
Suy ra : L ∈ SO (Hình 34).

Do đó IK, MN, SO đồng quy tại L. Từ đó ta suy ra cách dựng điểm N như sau : Nối SO cắt IK tại L, nối ML và kéo dài cắt SD tại N.

b) Ta có F ∈ mp(SAD) vì IN ⊂ mp(SAD) ;

F ∈ mp(SBC) vì KM ⊂ mp(SBC) (Hình 34).

Do đó F, S, E là ba điểm chung của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) nên chúng thẳng hàng.



Hình 34

c) Vì $\frac{SI}{IA} \neq \frac{SK}{KC}$ nên KI không song với AC.

Gọi R = IK ∩ AC, ta có R cố định. Ba điểm P, Q, R là ba điểm chung của hai mặt phẳng (ABCD) và (α), do đó P, Q, R thẳng hàng hay PQ luôn luôn đi qua một điểm cố định là R, khi mp(α) quay quanh IK.

Ví dụ 3 : Cho hình chóp S.ABCD. Gọi I là một điểm trên cạnh AD và K là một điểm trên cạnh SB.

a) Tìm các giao điểm E, F của IK và DK với mặt phẳng (SAC).

b) Gọi O = AD ∩ BC, M = SC ∩ OK. Chứng minh bốn điểm A, E, F, M thẳng hàng.

www.VNMATH.com

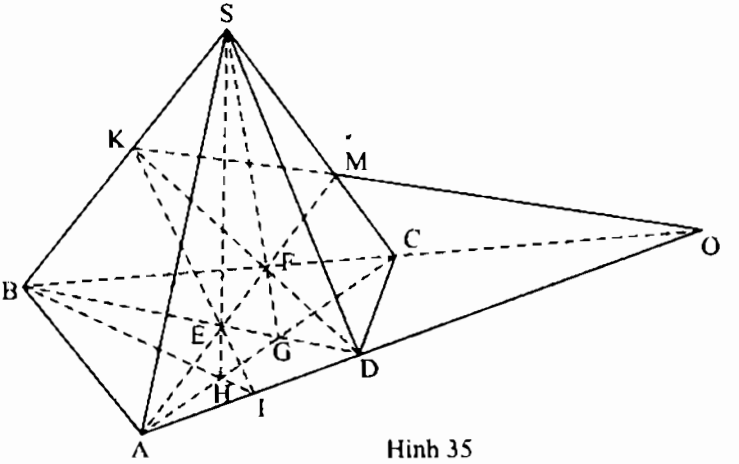
Hướng dẫn giải

a) Gọi H = AC ∩ BI ; G = AC ∩ BD.

Trong mặt phẳng (SBI), IK cắt SH tại E và trong mặt phẳng (SBD), DK cắt SG tại F. Ta có :

$$E = IK \cap mp(SAC) ; F = DK \cap mp(SAC).$$

b) Các điểm A, E, F, M thuộc mặt phẳng (AKO) vì chúng lần lượt thuộc các đường thẳng AO, IK, DK, OK của mặt phẳng này. Mặt khác các điểm A, E, F, M cũng thuộc mặt phẳng (SAC) vì chúng lần lượt thuộc các đường thẳng SA, SH, SG, SC của mặt phẳng (SAC) này. Vậy bốn điểm A, E, F, M là bốn điểm chung của hai mặt phẳng (AKO) và (SAC) nên chúng cùng nằm trên đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng đó.



Hình 35

Ví dụ 4 : Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F, G là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I, EG cắt AD tại H. Chứng minh CD, IG, HF đồng quy.

Hướng dẫn giải

Ta có :

$I \in EF \Rightarrow I \in (EFG)$

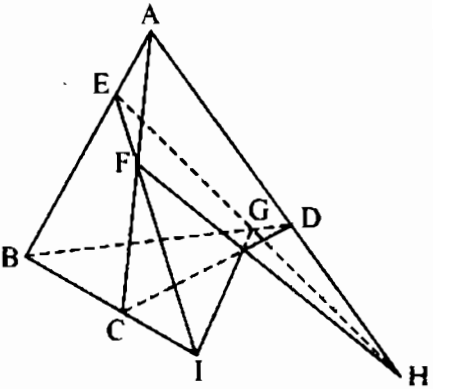
$I \in BC \Rightarrow I \in (BCD)$

Do đó :

$I \in (EFG) \cap (BCD)$

Vậy :

$IG = (EFG) \cap (BCD)$



Hình 36

www.VNMATH.com

Lập luận tương tự ta có : HF = (EFG) ∩ (ACD)

Gọi K là giao điểm của IG và CD. Ta có : IG ⊂ (EFG) và CD ⊂ (ACD)
Suy ra :

K ∈ (EFG) ∩ (ACD) = HF. Vậy CD, IG, HF đồng quy.

Dạng 5. TÌM TẬP HỢP GIAO ĐIỂM CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG DI ĐỘNG

Phương pháp

Tìm tập hợp các giao điểm M của hai đường thẳng di động d và d'.

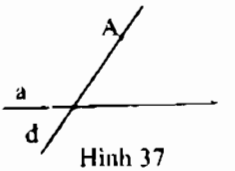
Phần thuận : Tìm hai mặt phẳng (α) và (β) cố định lần lượt chứa d và d'. Điểm M di động trên giao tuyến cố định của hai mặt phẳng đó.

Phần đảo : – Giới hạn (nếu có)

– Chứng minh phần đảo.

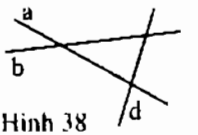
Chú ý :

– Nếu đường thẳng d di động nhưng luôn luôn đi qua điểm A cố định và cắt đường thẳng a cố định không qua A thì d chứa trong mặt phẳng cố định (A, a). (Hình 37)



Hình 37

– Nếu đường thẳng d di động nhưng luôn luôn cắt hai đường thẳng cắt nhau a, b cố định thì d chứa trong mặt phẳng cố định (a, b) (Hình 38).



Hình 38

Ví dụ 1 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy là tứ giác ABCD với AB và CD không song song. Gọi M là một điểm di động trên đoạn SB và N là giao điểm của cạnh SC với mặt phẳng (ADM).

Tìm tập hợp các giao điểm E của hai đường thẳng AM và DN.

Hướng dẫn giải

a) Phần thuận :

– Gọi (α) = mp (A, SB) ta có (α) cố định.

www.VNMATH.com

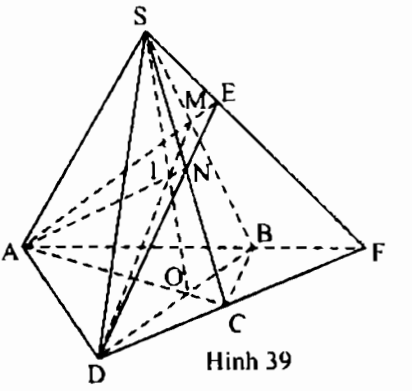
$M \in d = AM$ và $AM \subset (\alpha)$.

Vậy (α) là mặt phẳng cố định chứa AM. (Hình 39)

– Tương tự, đặt :

$(\beta) = mp(D, SC)$ ta có (β) là mặt phẳng cố định chứa $DN = d'$.

Gọi $O = AC \cap BD$, $I = DM \cap SO$, $F = AB \cap CD$, ta có :



Hình 39

$N = AI \cap SC$ và $E = AM \cap DN$.

$E \in AM \Rightarrow E \in (\alpha)$; $E \in DN \Rightarrow E \in (\beta)$

Suy ra : $E \in (\alpha) \cap (\beta) \Rightarrow E \in SF$.

b) Phần đảo :

- Giới hạn : Khi M di động trên đoạn SB thì điểm E di động trên đoạn SF.

– Chứng minh : Gọi E là một điểm tuỳ ý trên đoạn SF ta có AE cắt SB tại M, DE cắt SC tại N. Vậy E là giao điểm của AM và DN.

c) Kết luận : Tập hợp các giao điểm E của AM và DN là đoạn SF (Hình 39).

Ví dụ 2 : Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng a, b cắt nhau tại O. Cho hai điểm A, B nằm ngoài mặt phẳng (P) sao cho đường thẳng AB cắt mặt phẳng (P) tại điểm C khác với O. Xét mặt phẳng Q thay đổi luôn luôn đi qua AB cắt a tại A_1 và cắt b tại B_1 sao cho các đường thẳng AA_1 và BB_1 cắt nhau tại I còn AB_1 và BA_1 cắt nhau tại K.

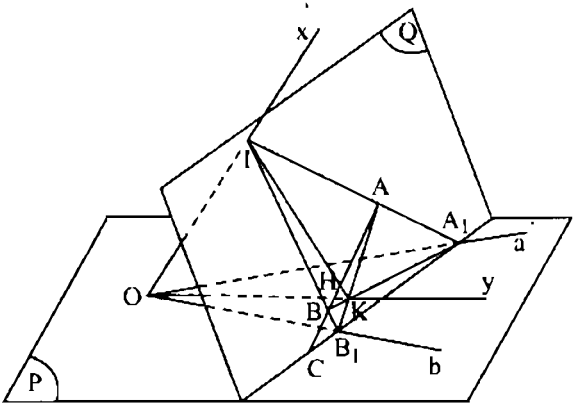
a) Chứng minh rằng đường thẳng A_1B_1 luôn đi qua một điểm cố định.

b) Chứng minh rằng mỗi điểm I và K luôn chạy trên một đường thẳng cố định và đường thẳng IK luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

a) Theo giả thiết ta có mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) cắt nhau theo giao tuyến A_1B_1. Mặt khác, C là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (P) mà mặt phẳng (Q) lại đi qua AB nên C thuộc giao tuyến A_1B_1 của (P) và (Q) tức là A_1B_1 luôn luôn đi qua điểm C cố định thuộc P (Hình 40).

www.VNMATH.com



Hình 40

b) Vì A và B nằm ngoài (P) nên nằm ngoài đường thẳng a và b. Gọi (R) là mặt phẳng xác định bởi điểm A và đường thẳng a ; (S) là mặt phẳng xác định bởi điểm B và đường thẳng b. Hai mặt phẳng này có chung điểm O nên cắt nhau theo giao tuyến Ox cố định. Ta lại có $I \in AA_1$ nên $I \in (R)$ và $I \in BB_1$ nên $I \in (S)$. Vậy I là điểm chung thứ hai của (R) và (S) nên I luôn chạy trên Ox cố định khi (Q) thay đổi.

Tương tự, điểm K luôn thuộc AB_1 nên mặt phẳng (R') xác định bởi A và b. Mặt khác, K lại thuộc BA_1 nên thuộc mặt phẳng (S') xác định bởi B và a. Vậy K luôn luôn chạy trên giao tuyến Oy cố định của hai mặt phẳng cố định (R') và (S'). Theo chứng minh trên đường thẳng IK thuộc mặt phẳng (Ox, Oy) cố định. Gọi $H = AB \cap IK$ thì H cũng là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (Ox, Oy) cố định. Vậy khi (Q) thay đổi đường thẳng IK luôn đi qua điểm H cố định (Hình 40).

Ví dụ 3 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy là tứ giác lồi ABCD với K là giao điểm của AD và BC. Gọi M là điểm di động trên cạnh SB.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ADM) và (SBC), đồng thời tìm giao điểm N của đường thẳng SC và mặt phẳng (ADM).

b) Gọi I là giao điểm của AN và DM. Chứng minh rằng khi M di động trên cạnh SB thì I luôn ở trên một đường thẳng cố định.

Hướng dẫn giải

a) Ta có MK là giao tuyến của hai mặt phẳng (ADM) và (SBC) vì chúng có M, K là hai điểm chung. Trong mặt phẳng SBC, MK và SC cắt nhau tại N. Vậy N là giao điểm của SC với mặt phẳng (ADM).

Gọi $O = AC \cap BD$.

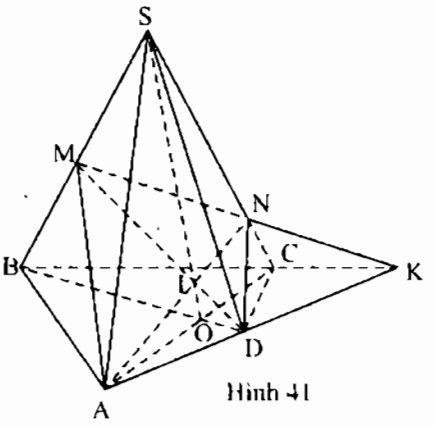
b) $DM \subset mp(SBD)$

$AN \subset mp(SAC)$

www.VNMATH.com

Suy ra DM ∩ AN = I ∈ mp(SBD) ∩ mp(SAC) = SO.

Vậy giao điểm I luôn ở trên đường thẳng SO cố định. (Hình 41) khi M di động trên SB.



Hình 41

Ví dụ 4 : Cho hình chóp S.ABCD. Trên SA, SB ta lần lượt lấy hai điểm cố định A', B' sao cho A'B' không song song với AB. Gọi E = AD ∩ BC, D' = SD ∩ A'E và C' = EB' ∩ SC, I = A'C' ∩ B'D'.

a) Chứng minh rằng khi D' di động trên SD thì điểm I luôn thuộc một đường thẳng cố định. Từ đó tìm tập hợp các điểm I khi D' di động trên đoạn SD.

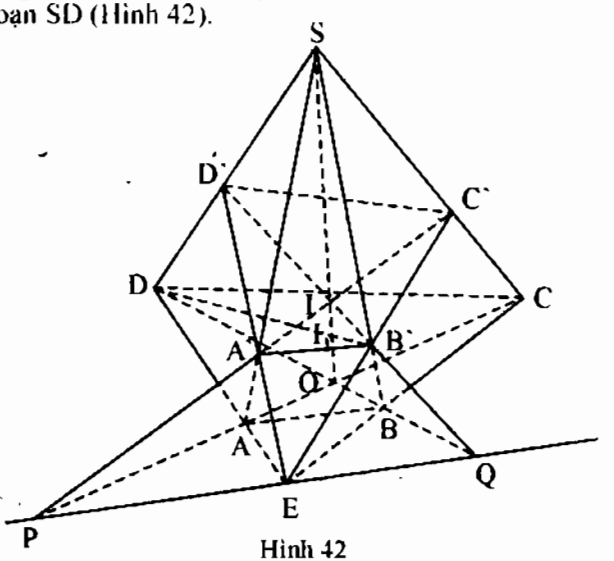
b) Gọi P = AC ∩ A'C', Q = BD ∩ B'D'. Chứng minh rằng khi D' thay đổi, đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

a) Gọi O = BD ∩ AC, ta có SO = mp(SAC) ∩ mp(SBD) mà A'C' ⊂ mp(SAC), B'D' ⊂ mp(SBD) nên I = AC' ∩ B'D' ∈ SO cố định khi D' di động trên SD. Gọi I_1 = DB' ∩ SO. Khi D' → D thì I → I_1. (Hình 42) và khi D' → S thì I → S. Suy ra tập hợp các điểm I là đoạn SI_1 khi điểm D' di động trên đoạn SD.

b) Gọi E = AD ∩ BC ta có E ∈ mp(ABCD) ∩ mp(A'B'C'D').

Mặt khác, PQ là giao tuyến của hai mặt phẳng (ABCD) và (A'B'C'D'). Do đó đường thẳng PQ luôn luôn đi qua điểm cố định E = AD ∩ BC khi D' thay đổi trên đoạn SD (Hình 42).



Hình 42

www.VNMATH.com

Dạng 8. TÌM THIẾT DIỆN CỦA HÌNH CHÓP VỚI MẶT PHẲNG

Phương pháp

Thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (α) là đa giác thu được khi cắt hình chóp bởi mặt phẳng đó.

Để xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) ta thực hiện các bước sau :

– Tìm hai điểm chung của mặt phẳng (α) với từng mặt của hình chóp ta được các đoạn giao tuyến.

– Nối các đoạn giao tuyến ta được một đường gấp khúc khép kín là đa giác cần tìm.

Ví dụ 1 : Cho tứ diện ABCD. Trên các đoạn CA, CB, BD cho lần lượt các điểm M, N, P sao cho MN không song song với AB, NP không song song với CD. Gọi (α) là mặt phẳng xác định bởi ba điểm M, N, P nói trên. Tìm thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện ABCD.

Hướng dẫn giải

Trong mặt phẳng (ABC), đường thẳng MN cắt AB tại I.

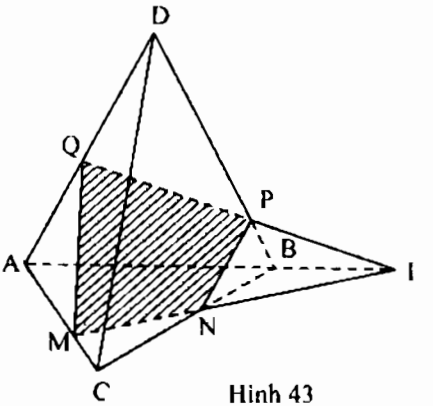
Trong mặt phẳng (ABD), đường thẳng IP cắt AD tại Q.

Ta có $MN = (\alpha) \cap (ABC)$

$NP = (\alpha) \cap (BCD)$

$PQ = (\alpha) \cap (ABD)$

$QM = (\alpha) \cap (ACD)$



Hình 43

Ta được thiết diện cắt tứ diện ABCD bởi mặt phẳng (α) là tứ giác MNPQ (Hình 43).

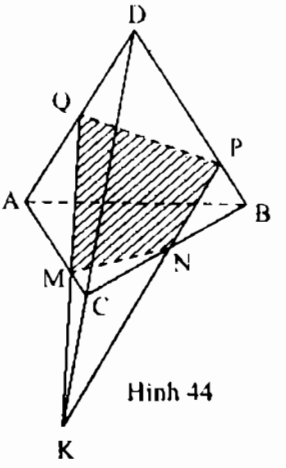
Chú ý :

a) Ta có thể tìm thiết diện bằng cách khác như sau :

Gọi $K = CD \cap NP$; $Q = AD \cap KM$.

www.VNMATH.com

Ta được thiết diện của tứ diện ABCD cắt bởi mặt phẳng (MNP) là tứ giác MNPQ. (Hình 44)



Hình 44

b) Nếu điểm P nằm trên cạnh DC thì bài toán tìm thiết diện đã cho ở trên trở nên đơn giản. Lúc đó ta có ngay thiết diện là tam giác MNP. (Độc giả tự vẽ hình).

Ví dụ 2 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, E là ba điểm lần lượt lấy trên AD, CD, SO. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNE).

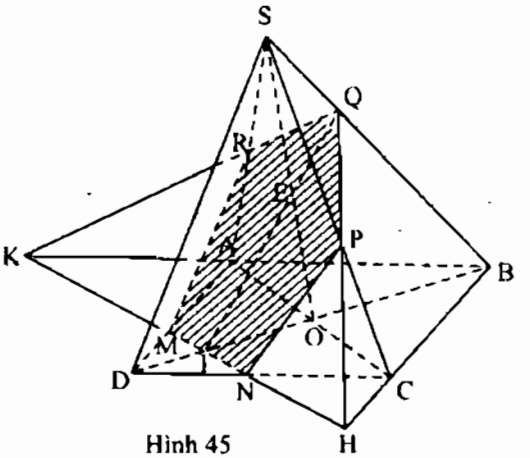
Hướng dẫn giải

Gọi I = MN ∩ BD.

Trong mp(SBD), IE cắt SB tại Q. Trong mặt phẳng đáy đường thẳng MN cắt BC tại H và cắt AB tại K. Ta có :

HQ = (SBC) ∩ (EMN) và HQ cắt SC tại P. Mặt khác :

KQ = (SAB) ∩ (EMN) và KQ cắt SA tại R. Các đoạn MN, NP, PQ, QR, RM là các đoạn giao tuyến của mặt phẳng (MNE) với đáy và các mặt bên của hình chóp. Thiết diện là ngũ giác MNPQR (Hình 45).



Hình 45

Ví dụ 3 : Cho hình chóp S.ABCD. Trong tam giác SBC lấy một điểm M và trong tam giác SCD lấy một điểm N.

www.VNMATH.com

a) Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SAC).

b) Tìm giao điểm của cạnh SC với mặt phẳng (AMN).

c) Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (AMN).

Hướng dẫn giải

a) Gọi M' = SM ∩ BC, N' = SN ∩ CD

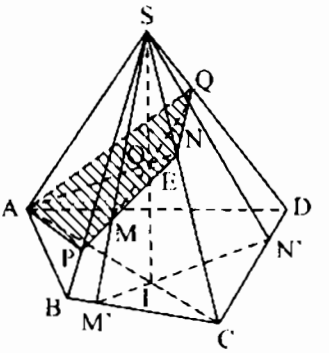
I = M'N' ∩ AC, O = MN ∩ SI (Hình 46)

Ta được O là giao điểm của MN với mặt phẳng (SAC) :

O = MN ∩ (SAC).

b) Trong mp(SAC) ta có :

E = AO ∩ SC, ta có E là giao điểm của cạnh SC và mặt phẳng (AMN) : E = SC ∩ (AMN) (Hình 46).



Hình 46

c) Trong mặt phẳng (SBC), EM cắt SB tại P. Trong mặt phẳng (SCD), EN cắt SD tại Q. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (AMN) là tứ giác APEQ.

Ví dụ 4 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SC.

a) Tìm giao điểm I của đường thẳng AM với mặt phẳng (SBD). Chứng minh IA = 2MI.

b) Tìm giao điểm F của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM). Chứng minh F là trung điểm của cạnh SD và tứ giác ABMF là một hình thang.

c) Gọi N là một điểm tuỳ ý lấy trên cạnh BC. Tìm thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (AMN).

Hướng dẫn giải

a) Gọi O = AC ∩ BD. Ta có :

SO = mp(SAC) ∩ mp(SBD) ; I = AM ∩ SO

Suy ra : I = AM ∩ (SBD).

Đối với tam giác SAC, hai trung tuyến SO và AM cắt nhau tại I. Vậy I là trọng tâm của tam giác đó và suy ra IA = 2MI.

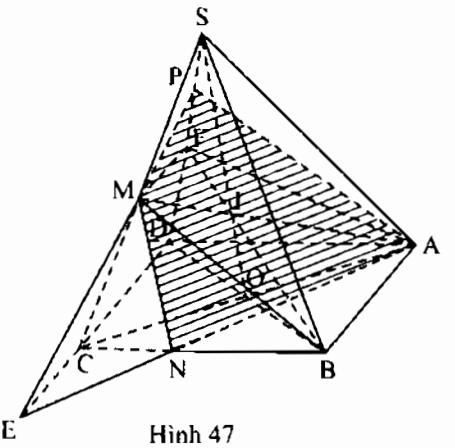
b) Xét mặt phẳng (SBD) chứa SD. Mặt phẳng (ABM) cắt mặt phẳng (SBD) theo giao tuyến BI. Trong mặt phẳng (SBD) ta có :

F = SD ∩ BI.

www.VNMATH.com

suy ra :

F = SD ∩ mp(ABM). Đối với tam giác SBD ta có SO là trung tuyến và SI = 2IO (vì I là trọng tâm của tam giác SAC) nên I là trọng tâm của tam giác SBD. Do đó BF là trung tuyến và ta suy ra F là trung điểm của cạnh SD. Ta có MF là đường trung bình của tam giác SCD nên MF // CD và $\frac{CD}{MF} = 2, \frac{AB}{MF} = 2.$



Hình 47

Mặt khác, ta có $\frac{IA}{IM} = \frac{IB}{IF} = 2.$

Ta suy ra hai tam giác IAB và IMF vị tự với nhau qua phép vị tự tâm I với tỉ số k = 2. Do đó AB // MF và tứ giác ABMF là một hình thang.

Chú thích :

Phần này nếu được dùng các kiến thức của quan hệ song song chúng ta có thể chứng minh gọn hơn.

c) Gọi E = DC ∩ AN, P = EM ∩ SD. ta được thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (AMN) là tứ giác MNAP. (Hình 47).

C. LUYỆN TẬP

1.1 Cho tứ diện đều ABCD có các cạnh đều bằng a. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính IK.

b) M là một điểm di động trên BC nhưng không trùng với trung điểm của đoạn BC. Tìm thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (MIK).

1.2 Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M, N là các điểm lần lượt lấy trên các đoạn BC và SD.

a) Tìm giao điểm I của đường thẳng BN với mặt phẳng (SAC) và giao điểm K của đường thẳng MN với mặt phẳng (SAC).

b) Tìm thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng (BCN).

www.VNMATH.com

1.3 Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với AB là cạnh đáy lớn. Gọi I là trung điểm của SC. Mặt phẳng (α) quay quanh AI cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định.

b) Đoạn IM kéo dài cắt BC tại P, đoạn IN kéo dài cắt CD tại Q. Chứng minh đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định.

c) Khi M di động trên đoạn SB thì giao điểm của IM và AN chạy trên đường thẳng cố định nào.

1.4 Cho hình chóp tam giác SABC. Gọi K, N lần lượt là trung điểm của SA, BC. Lấy điểm M trên SC sao cho $\frac{SM}{MC} = \frac{2}{3}$.

a) Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng (KMN) và hình chóp đã cho.

b) Mặt phẳng (KMN) cắt cạnh AB tại L. Tính tỉ số $\frac{LA}{LB}$.

1.5 Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn SB và AD. Đường thẳng BN cắt CD tại I.

a) Chứng minh ba điểm M, I và trọng tâm G của tam giác SAD thẳng hàng.

b) Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (CGM). Chứng minh rằng trung điểm của đoạn SA thuộc thiết diện này.

c) Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (AGM).

www.VNMATH.com

Chương 2.
QUAN HỆ SONG SONG

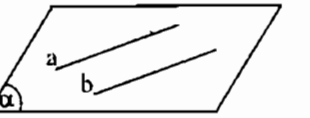
§ 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Hai đường thẳng a, b gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung

$$a // b \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = \varnothing \end{cases}$$ (Hình 48)

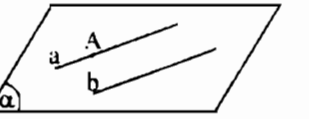


Hình 48

2. Các định lí

Định lí 1 :

Qua một điểm A cho trước không nằm trên một đường thẳng b cho trước có một và chỉ một đường thẳng a song song với b (Hình 49).

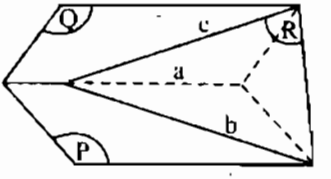


Hình 49

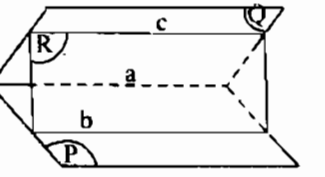
Định lí 2 : *(về giao tuyến của ba mặt phẳng)*

Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

$$\begin{cases} P \cap Q = a \\ P \cap R = b \\ R \cap Q = c \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a, b, c \text{ đồng quy (Hình 50a)} \\ a // b // c \qquad \text{(Hình 50b)} \end{array}\right.$$



Hình 50 a



Hình 50 b

Hệ quả :

Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó.

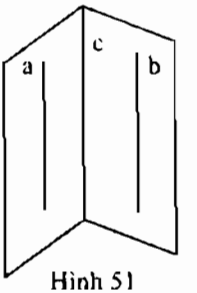
www.VNMATH.com

$$\begin{cases} a // b \\ P \supset a \\ Q \supset b \\ P \cap Q = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c // a \\ c // b \end{cases}$$

Định lí 3 :

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

$$\begin{cases} a \neq b \\ a // c \\ b // c \end{cases} \Rightarrow a // b \text{ (Hình 51)}$$



Hình 51

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Dạng 1. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG a VÀ b

Phương pháp

Để chứng minh hai đường thẳng a và b song song với nhau ta thường dùng một trong các cách sau :

a) Chứng minh a, b đồng phẳng rồi áp dụng các phương pháp chứng minh trong hình học phẳng như tính chất đường trung bình của tam giác, xét các góc so le trong, sử dụng định lí Talet đảo v.v...

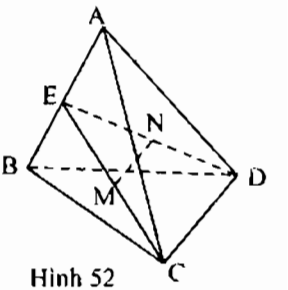
b) Chứng minh a, b cùng song song với một đường thẳng thứ ba c.

c) Áp dụng định lí về giao tuyến : nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến (nếu có) của chúng song song với hai đường thẳng ấy.

Ví dụ 1 : Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD. Chứng minh MN song song với CD.

Hướng dẫn giải

Gọi E là trung điểm của AB. Ta có $M \in EC$, $N \in ED$. Do đó MN và CD đồng phẳng. Mặt khác $\frac{EM}{EC} = \frac{EN}{ED} = \frac{1}{3}$ vì M và N là trọng tâm của các tam giác ABC và ABD. Ta suy ra MN // CD (Hình 52).



Hình 52

www.VNMATH.com

Ví dụ 2 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với cạnh đáy lớn là AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB.

a) Chứng minh MN // CD.

b) Gọi P là giao điểm của SC và mặt phẳng (ADN). Hai đường thẳng AN và DP cắt nhau tại I. Chứng minh SI // AB và SA // IB.

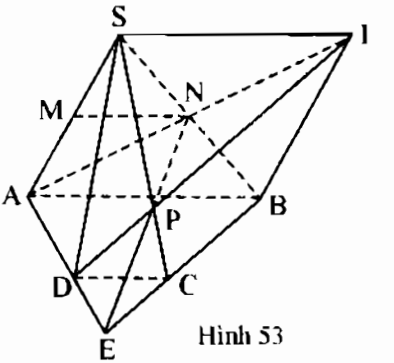
Hướng dẫn giải

a) M, N là đường trung bình của tam giác SAB nên MN // AB, mà AB // CD, theo giả thiết, nên suy ra MN // CD.

b) Gọi E = AD ∩ BC. Trong mặt phẳng SBC, NE cắt SD tại P, ta có P là giao điểm của SC và mặt phẳng (ADN). Ta có :

AB ⊂ (SAB), CD ⊂ (SCD) mà AB // CD và SI = (SAB)∩(SCD) nên SI // AB // CD.

Vì SI = 2MN và AB = 2MN nên SABI là hình bình hành. Do đó SA // IB (Hình 53).

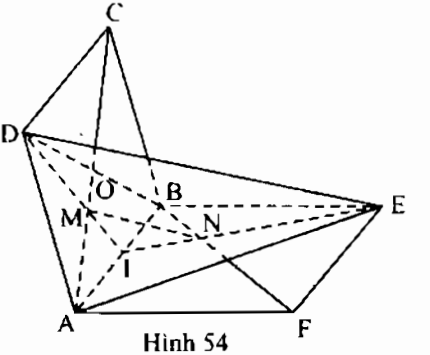


Hình 53

Ví dụ 3 : Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC, BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = \frac{1}{3}$. Chứng minh rằng MN // DE.

Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD, ta có O là trung điểm của BD và AO là trung tuyến của tam giác ABD. Mặt khác, vì $\frac{AM}{AC} = \frac{1}{3}$ ta suy ra $\frac{AM}{AO} = \frac{2}{3}$. Do đó M là trọng tâm của tam giác ABD nên DM đi qua trung điểm I của AB và ta có $\frac{IM}{ID} = \frac{1}{3}$.



Hình 54

Chứng minh tương tự ta có EN qua I và $\frac{IN}{IE} = \frac{1}{3}$. trong tam giác IDE vì $\frac{IM}{ID} = \frac{IN}{IE} = \frac{1}{3}$ nên ta suy ra MN // DE.

www.VNMATH.com

Dạng 2. TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG

Phương pháp

Trước đây ta đã biết cách tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng cách tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng đó. Bây giờ ta có thêm một cách khác sau đây :

– Tìm một điểm chung của hai mặt phẳng.

– Tìm phương của giao tuyến (biết giao tuyến song song với một đường thẳng đã có).

Khi đó giao tuyến là đường thẳng đi qua điểm chung và song song với đường thẳng đã có.

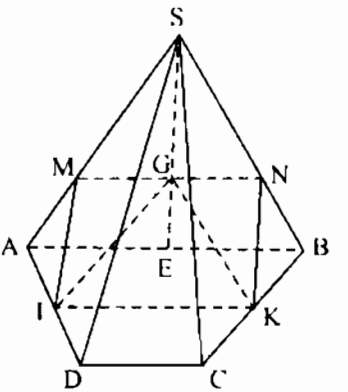
Ví dụ 1 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với hai cạnh đáy AB và CD. Gọi I, K lần lượt là hai trung điểm của AD, BC và G là trọng tâm của tam giác SAD.

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (IKG) với mặt phẳng (SAD).

b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IKG). Thiết diện là hình gì ? Tìm điều kiện đối với AB và CD để thiết diện là hình bình hành.

Hướng dẫn giải

a) Giao tuyến của (IKG) và (SAD) là đường thẳng đi qua điểm chung G, cắt SA tại M và SB tại N với MN // AB // IK (Hình 55).



Hình 55

b) Nối IK, KN, NM, MI ta được thiết diện là hình thang IKNM. Ta có : MN // AB suy ra $\frac{MN}{AB} = \frac{SG}{SE} = \frac{2}{3}$ với $E = AB \cap SG$.

Do đó : $MN = \frac{2}{3}AB$.

Mặt khác : $IK = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

Muốn hình thang IKMN là hình bình hành thì MN = IK. Ta có $MN = IK \Leftrightarrow \frac{2}{3}AB = \frac{1}{2}(AB + CD) \Leftrightarrow AB = 3CD$: đó là điều kiện cần tìm.

www.VNMATH.com

Ví dụ 2 : Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC và P là một điểm bất kì trên đoạn BD.

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng (ABD).

b) Gọi Q là giao điểm của AD và mặt phẳng (MNP). Xác định vị trí của điểm P để MNPQ là hình bình hành.

c) Trong trường hợp MQ và NP cắt nhau tại I, hãy xác định giao tuyến của mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng (ABI).

Hướng dẫn giải

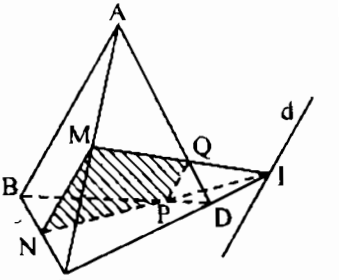
a) P là điểm chung của hai mặt phẳng (MNP) và (ABD). Vì $MN \subset (MNP)$, $AB \subset (ABD)$ và $MN // AB$ nên giao tuyến PQ của (MNP) và (ABD) phải song song với AB và MN.

$PQ // AB // MN$ với $Q \in AD$.

b) Ta có $PQ // MN$ và MNPQ là hình thang. Muốn MNPQ là hình bình hành thì cần có thêm điều kiện :

$$PQ = MN = \frac{AB}{2}$$

nghĩa là PQ phải là đường trung bình của tam giác DAB. Khi đó P là trung điểm của đoạn BD.



Hình 56

c) Hai mặt phẳng (MNP) và (ABI) có chung điểm I lần lượt chứa MN, AB mà $MN // AB$ nên có giao tuyến là đường thẳng d đi qua I và song song với AB và tất nhiên $d // MN$:

$$d // AB // MN$$

Ví dụ 3 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD.

a) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng (SAB) và (SCD), (SAD) và (SBC).

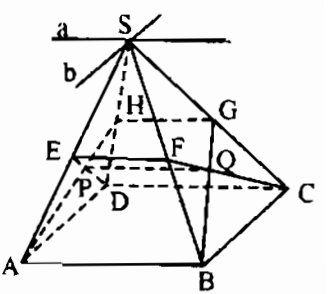
b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABH) và (CDF).

Hướng dẫn giải

a) Vì $AB // CD$ nên hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có giao tuyến là đường thẳng a đi qua S và song song với AB. Tương tự hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có giao tuyến là đường thẳng b đi qua S và song song với BC.

b) Gọi $P = ED \cap AH$,

$Q = BG \cap CF$.



Hình 57

Hai mặt phẳng (ABH) và (CDF) lần lượt chứa AB và CD song song với nhau nên có giao tuyến $PQ // AB // CD$ (Hình 57).

www.VNMATH.com

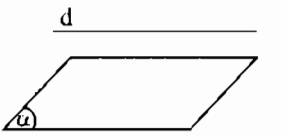
§ 3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Đường thẳng d và mặt phẳng (α) gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

$d // (\alpha) \Leftrightarrow d \cap (\alpha) = \varnothing$ (Hình 58)



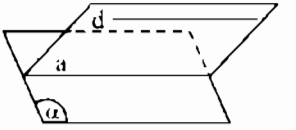
Hình 58

2. Các định lí

Định lí 1 :

Điều kiện cần và đủ để một đường thẳng d song song với một mặt phẳng (α) là đường thẳng đó không nằm trong mặt phẳng và song song với một đường thẳng nào đó chứa trong mặt phẳng (Hình 59)

$$d // (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} d \not\subset (\alpha) \\ d // a \text{ với } a \subset (\alpha) \end{cases}$$

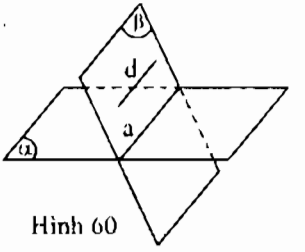


Hình 59

Định lí 2 :

Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) đi qua d mà cắt mặt phẳng (α) thì giao tuyến của (α) và (β) song song với d (Hình 60).

$$\begin{cases} d // (\alpha), d \subset (\beta) \\ a = (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow d // a$$

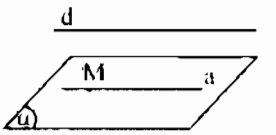


Hình 60

Hệ quả :

Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α). Nếu từ một điểm M của (α) ta có đường thẳng a song song với d thì a nằm trong (α) (Hình 61).

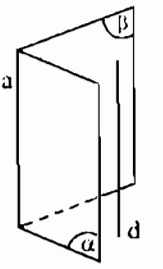
$$\begin{cases} d // (\alpha) \\ M \in (\alpha), M \in a \\ a // d \end{cases} \Rightarrow a \subset (\alpha)$$



Hình 61

Định lí 3 :

Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau và cùng song song với một đường thẳng d thì giao tuyến a của chúng song song với đường thẳng d đó (Hình 62).



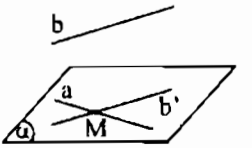
Hình 62

www.VNMATH.com

$$\begin{cases}(\alpha)\cap(\beta)=a\\ d//(\alpha),\ d//(\beta)\end{cases}\Rightarrow a//d$$

Định lí 4 :

Cho a và b là hai đường thẳng chéo nhau. Khi đó có một và chỉ một mặt phẳng đi qua đường thẳng này và song song với đường thẳng kia (Hình 63).



Hình 63

$$\begin{cases}a,\ b\ \text{chéo nhau}\\ M\in a,\ M\in b' \Rightarrow (\alpha)=(a,b')//b\\ b'//b\end{cases}$$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Dạng 1. CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG d SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG (α)

Phương pháp

Chứng minh d không nằm trong (α) và song song với đường thẳng a chứa trong (α).

Chú thích : Nếu đường thẳng a không có sẵn trong (α) thì ta chọn một mặt phẳng (β) chứa d và chứng minh $a=(\alpha)\cap(\beta)$ song song với d.

Ví dụ 1 : Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF có chung cạnh AB nhưng không nằm trong một mặt phẳng.

a) Gọi O và O' lần lượt là tâm của ABCD và ABEF. Chứng minh OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b) Gọi M và N lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD và ABE. Chứng minh MN song song với mặt phẳng (CEF).

Hướng dẫn giải

a) OO' không chứa trong mặt phẳng (ADF) và (BCE). Ta có OO' // DF mà $DF\subset(ADF)$. Do đó OO' // mp(ADF).

Tương tự : OO' // CE mà $CE\subset(BCE)$. Do đó : OO' // mp(BCE) (Hình 64).

www.VNMATH.com

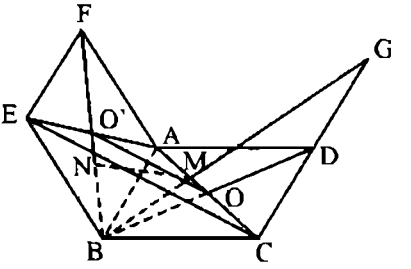
b) Kéo dài BM cắt CD tại G ta có AB // CD nên :

$$\frac{BM}{BG} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{3}$$

Mặt khác, ta có : $\frac{BN}{BF} = \frac{1}{3}$.

Do đó MN // GF

Mà $GF \subset mp(CDFE)$ và mặt phẳng này không chứa MN, nên ta suy ra MN // mp(CEF).



Hình 64

Ví dụ 2 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD.

a) Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD).

b) Gọi P là trung điểm của SA. Chứng minh SB và SC đều song song với mặt phẳng (MNP).

c) Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC. Chứng minh G_1G_2 song song với mặt phẳng (SAB).

Hướng dẫn giải

a) MN // mp(SBC) vì MN không thuộc mặt phẳng (SBC) và MN // BC $\subset$ mp(SBC).

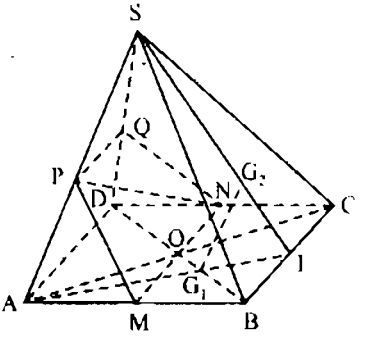
Tương tự, MN // mp(SAD) vì MN không thuộc mặt phẳng (SAD) và MN // AD $\subset$ mp(SAD).

b) SB // mp(MNP) vì (MNP) không chứa SB và ta có :

$$SB // PM \subset mp(PMN).$$

SC // mp(MNP) vì (MNP) không chứa SC và ta có SC // NQ với Q là trung điểm của đoạn SD và $NQ \subset mp(MNP)$. (Hình 65).

c) Gọi I là trung điểm của đoạn BC ta có $G_1 \in AI$ và $G_2 \in SI$. Vì G_1 và G_2 là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC nên ta có $\frac{IG_1}{IA} = \frac{IG_2}{IS} = \frac{1}{3}$. Do đó $G_1G_2 // SA \subset (SAB)$ và G_1G_2 không thuộc mặt phẳng (SAB). Vậy G_1G_2 // mp(SAB).



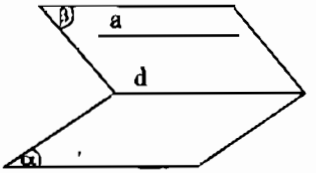
Hình 65

www.VNMATH.com

Dạng 2. TÌM THIẾT DIỆN SONG SONG VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

Phương pháp

Nếu mặt phẳng (α) song song với đường thẳng a và mặt phẳng (α) cắt mặt phẳng (β) chứa a thì giao tuyến $d = (\alpha) \cap (\beta)$ song song với a (Hình 66).



Hình 66

Ví dụ 1 : Cho tứ diện ABCD. Một mặt phẳng (α) bất kì song song với AC và BD đi qua điểm P trên BC, cắt các cạnh AB, AD, CD lần lượt tại Q, R, S (Hình 67).

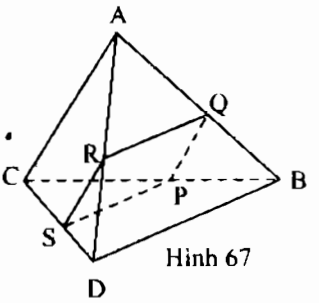
a) Chứng minh PQRS là hình bình hành.

b) Xác định vị trí của Q để PQRS là hình thoi.

Hướng dẫn giải

a) Gọi (α) là mặt phẳng song song với AC và BD.

Vì (α) // AC nên (α) cắt hai mặt phẳng (ABC) và (ADC) theo hai giao tuyến PQ // RS // AC (Hình 67).



Hình 67

Mặt khác, (α) // BD nên (α) cắt hai mặt phẳng (ADB) và (CDB) theo hai giao tuyến QR // PS // BD.

Tứ giác PQRS có PQ // RS và QR // PS nên đó là một hình bình hành.

b) Muốn hình bình hành PQRS trở thành hình thoi ta cần có RQ = SR. Kéo dài DQ cắt đường thẳng đi qua A và song song với BD tại K.

Ta có : $\frac{RQ}{AK} = \frac{DR}{DA} = \frac{DQ}{DK}$

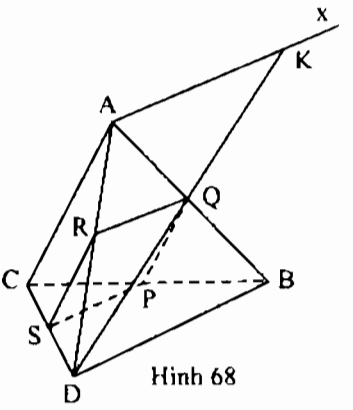
Mặt khác : $\frac{SR}{CA} = \frac{DR}{DA} = \frac{DS}{DC}$

Do đó : $\frac{RQ}{AK} = \frac{SR}{CA}$.

www.VNMATH.com

PQRS là hình thoi $\Leftrightarrow$ RQ = SR $\Leftrightarrow$ AK = CA (Hình 68).

Vậy muốn thiết diện PQRS là hình thoi, ta lấy trên đường Ax // DB một điểm K sao cho AK = CA và tìm được điểm $Q = AB \cap DK$. Qua Q ta có mặt phẳng (α') song song với AC và BD cắt tứ diện ABCD theo hình thoi PQRS.



Hình 68

Ví dụ 2 : Cho hình chóp S.ABCD với M, N là hai điểm lần lượt lấy trên các cạnh AB và CD. Gọi (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SA.

a) Tìm các giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt phẳng (SAB) và (SAC).

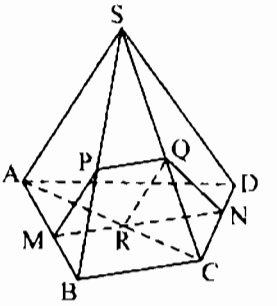
b) Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α).

c) Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang.

Hướng dẫn giải

a) $Mp(\alpha)$ // SA mà $SA \subset (SAB)$ và $M \in (\alpha) \cap (SAB)$.

Ta biết một điểm chung M của (α) và (SAB) đồng thời biết phương của giao tuyến là phương song song với SA. Vậy $(\alpha) \cap (SAB) = MP$ với MP // SA. Tương tự, ta có $R = AC \cap MN$ là một điểm chung của (α) với (SAC) đồng thời $mp(\alpha)$ // SA mà $SA \subset (SAC)$ nên ta có giao tuyến là $RQ = (\alpha) \cap (SAC)$ với RQ // SA (Hình 69).



Hình 69

b) Các đoạn giao tuyến của (α) với các mặt (SAB), (SBC), (SCD) và (ABCD) là MP, PQ, QN, NM. Do đó thiết diện là tứ giác MPQN.

c) Muốn cho tứ giác MPQN là hình thang thì cần phải có : MP // QN (điều kiện I) hoặc MN // PQ (điều kiện II).

I) Nếu MP // QN thì vì SA // PM và SA // QN. Như vậy SA song song với đường thẳng QN của mp(SCD) nên suy ra SA // mp(SCD) là vô lí.

II) Nếu MN // PQ thì ta có MN // BC vì $BC = (ABCD) \cap (SBC)$ và $MN \subset (ABCD)$, $PQ \subset (SBC)$.

www.VNMATH.com

Đảo lại nếu có MN // BC thì ta suy ra MN // PQ vì $PQ = (\alpha) \cap (SBC)$ và $MN \subset (\alpha)$, $BC \subset (SBC)$.

Chú thích : Ở đây ta vận dụng định lí : "Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song". (ba giao tuyến trong bài toán này là MN, PQ, BC).

Vậy để thiết diện là hình thang (với MN // PQ) thì MN // BC.

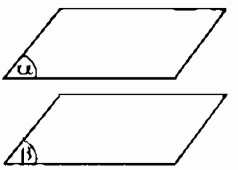
§ 4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Hai mặt phẳng (α) và (β) gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung (Hình 70).

$$(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow (\alpha) \cap (\beta) = \varnothing$$



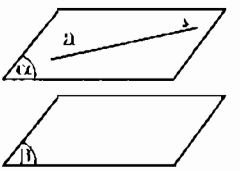
Hình 70

2. Các định lí

Định lí 1 :

Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng a nằm trong (α) đều song song với (β) (Hình 71).

$$\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ a \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow a // (\beta)$$

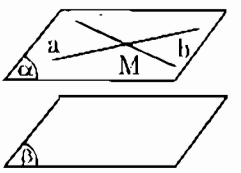


Hình 71

Định lí 2 :

Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và hai đường thẳng này cùng song song với một mặt phẳng (β) cho trước thì hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau (Hình 72).

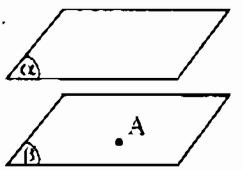
$$\begin{cases} a \cap b = M \\ a \subset (\alpha),\ b \subset (\alpha) \\ a // (\beta),\ b // (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$$



Hình 72

Định lí 3 :

Qua một điểm A bất kì cho trước không nằm trên mặt phẳng (α) cho trước có một và chỉ một mặt phẳng (β) song song với mặt phẳng (α). (Hình 73).



Hình 73

www.VNMATH.com

Hệ quả :

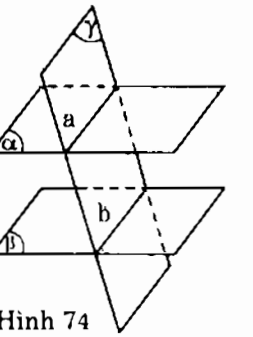
1. $a // \alpha \Rightarrow$ Có 1 và chỉ 1 $mp(\beta) \supset a$ và $(\beta) // (\alpha)$

2. $\begin{cases} (\alpha) // (\gamma) \\ (\beta) // (\gamma) \\ (\alpha) \neq (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$

3. $\begin{cases} A \notin (\alpha) \\ A \in a' // (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a' \subset (\beta) \ni A$ và $(\beta) // (\alpha)$

Định lí 4 :

Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song thì mọi mặt phẳng (γ) đã cắt (α) thì phải cắt (β) và các giao tuyến của chúng song song (Hình 74).



Hình 74

$$\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ (\alpha) \cap (\gamma) = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha) \cap (\beta) = b \\ a // b \end{cases}$$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Dạng 1. CHỨNG MINH HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Phương pháp

Chứng minh mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng kia.

Chú thích : Có thể dùng phương pháp chứng minh hai mặt phẳng song song để chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng. Thí dụ muốn chứng minh đường thẳng $d // (\alpha)$ ta tìm một mặt phẳng (β) chứa d và chứng minh $(\beta) // (\alpha)$ và từ đó suy ra $d // (\alpha)$.

Ví dụ 1 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD tâm O. Gọi M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm của các đoạn SA, SD, AB, ON, SB.

a) Chứng minh mặt phẳng (OMN) song song với mặt phẳng (SBC).

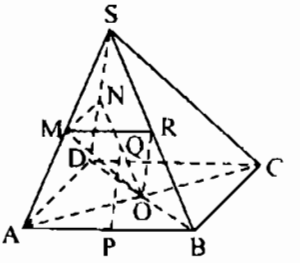
b) Chứng minh PQ song song với mặt phẳng (SBC).

c) Chứng minh mặt phẳng (MOR) song song với mặt phẳng (SCD).

www.VNMATH.com

Hướng dẫn giải

a) OM là đường trung bình của tam giác ACS nên OM // SC, còn ON là đường trung bình của tam giác DBS nên ON // SB. Do đó mp(OMN) // mp(SBC) (Hình 75).



Hình 75

b) $Q \in ON \subset mp(OMN) \Rightarrow Q \in mp(OMN)$

Ta lại có : $OP // MN \Rightarrow P \in mp(OMN)$

Vậy : $PQ \subset mp(OMN)$ mà $mp(OMN) // mp(SBC)$.

Do đó : $PQ // mp(SBC)$.

c) $MR // AB \Rightarrow MR // DC$, $OR // SD$ nên :

$mp(MOR) // mp(SCD)$ (Hình 75).

Ví dụ 2 : Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC, BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF}$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M và N lần lượt cắt AD, AF tại M', N'.

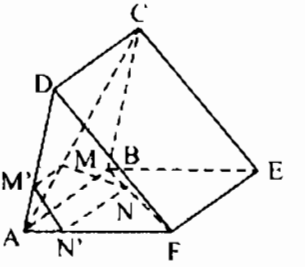
a) Chứng minh rằng mặt phẳng (CBE) song song với mặt phẳng (ADF).

b) Chứng minh mặt phẳng (MNM') song song với mặt phẳng (DEF) và MN // mp(DEF).

Hướng dẫn giải

a) $\begin{cases} BE // AF \\ BC // AD \end{cases} \Rightarrow mp(CBE) // mp(ADF)$

b) MM' // AB, NN' // AB $\Rightarrow$ MN' // NN' // CD // EF



Hình 76

Mặt khác :

$$\begin{cases} \frac{AM}{AC} = \frac{AM'}{AD} \\ \frac{BN}{AF} = \frac{AN'}{AF} \end{cases} \Rightarrow \frac{AM'}{AD} = \frac{AN'}{AF}$$

$$\Rightarrow M'N' // DF$$

Do đó : mp(MM', NN') // mp(DC, FE)

Hay : mp(MNM') // mp(DEF) (Hình 76).

Vì $MN \subset mp(MNM')$ nên MN // mp(DEF).

www.VNMATH.com

Dạng 2. XÁC ĐỊNH THIẾT DIỆN CỦA MỘT MẶT PHẲNG SONG SONG VỚI MỘT MẶT PHẲNG CHO TRƯỚC

Phương pháp

Sử dụng định lí : "Nếu hai mặt phẳng song song bị cắt bởi một mặt phẳng thứ ba thì hai giao tuyến song song với nhau".

Ví dụ 1 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Trên cạnh AB lấy một điểm M với AM = x. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAD), cắt SB, SC và CD lần lượt tại N, P, Q.

a) Tứ giác MNPQ là hình gì ?

b) Tìm tập hợp các điểm I với I = MN ∩ PQ khi M chạy trên đoạn AB.

c) Cho góc $\widehat{SAD} = 90^0$ và SA = a. Hãy tính diện tích của tứ giác MNPQ theo a và x.

Hướng dẫn giải

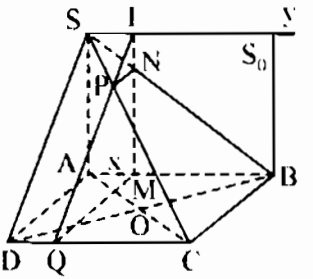
a) Vì (α) // mp(SAD) nên (α) song song với SA, AD và SD.

* (α) // SA, do đó (α) cắt mp(SAB) theo giao tuyến MN // SA.

* (α) // DA, do đó (α) cắt mp(ABCD) theo giao tuyến MQ // AD và cắt mp(SBC) theo giao tuyến PN // AD.

* (α) // SD, do đó (α) cắt mp(SCD) theo giao tuyến PQ // SD.

Vậy thiết diện MNPQ là hình thang vì có PN // QM. (Hình 77).



Hình 77

b) MN ⊂ mp(SAB), PQ ⊂ mp(SDC). Vì hai mặt phẳng (SAB) và (SDC) lần lượt chứa AB và DC song song với nhau nên mp(SAB) và mp(SDC) có giao tuyến là Sy // AB // DC. Ngược lại, mặt phẳng (α) qua I sẽ cắt mp(SAB) theo IM // SA và cắt mp(SDC) theo IQ // SD. Khi M → A thì I → S và khi M → B thì I → S_0 với $SS_0 = AB$.

Vậy tập hợp các điểm I = MN ∩ PQ khi M chạy trên đoạn AB là đoạn SS_0 với SS_0 // AB và $SS_0 = AB = a$.

www.VNMATH.com

c) Nếu $\widehat{SAD} = 90^0$ thì MNPQ là hình thang vuông tại M và N. Ta có :

$$S_{MNPQ} = S_{AMQ} - S_{MPN} - S_{ASAD} - S_{MNP} = \frac{1}{2}(a^2 - PN^2)$$

Ta có : $\frac{PN}{BC} = \frac{SN}{SB} = \frac{AM}{AB} \Leftrightarrow \frac{PN}{a} = \frac{x}{a} \Rightarrow PN = x$. Vậy : $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)$.

Ví dụ 2 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O và có AC = a, BD = b. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) di động song song với mặt phẳng (SBD) và đi qua điểm I trên đoạn OC.

a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α).

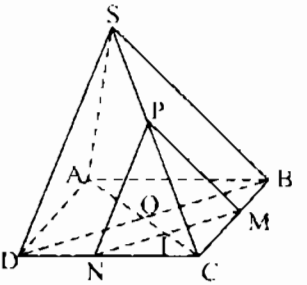
b) Tính diện tích thiết diện theo a, b và x = AI.

Hướng dẫn giải

a) Thiết diện cắt bởi mặt phẳng (α) qua điểm $I \in OC$:

(α) // mp(SBD) nên (α) cắt các mặt phẳng (ABCD), (SBC), (SCD) theo các giao tuyến MN // BD, NP // SB, NP // SD (Hình 78).

Thiết diện là tam giác đều MNP có các cạnh song song từng đôi một với các cạnh của tam giác đều SBD có cạnh bằng b.



Hình 78

b) Ta có : $S_{SBD} = \frac{BD^2\sqrt{3}}{4} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$

Vì : $I \in OC \Leftrightarrow \frac{a}{2} < x < a$, ta có

$$\frac{S_{MNP}}{S_{SBD}} = \left(\frac{MN}{BD}\right)^2 = \left(\frac{CI}{CO}\right)^2 = \frac{(AC - AI)^2}{CO^2} = \frac{(a-x)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \left[\frac{2(a-x)}{a}\right]^2$$

Mà $S_{SBD} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$ nên :

$$S_{MNP} = S_{SBD}\cdot\left[\frac{MN}{BD}\right]^2 = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4(a-x)^2}{a^2} = \frac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}, \text{ với } \frac{a}{2} < x < a.$$

Chú thích : Có thể sử dụng mối quan hệ song song của hai mặt phẳng để chứng minh một đường thẳng song song với một mặt phẳng hoặc hai đường thẳng nào đó song song với nhau hoặc một đường thẳng di động nhưng luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định cho trước.

www.VNMATH.com

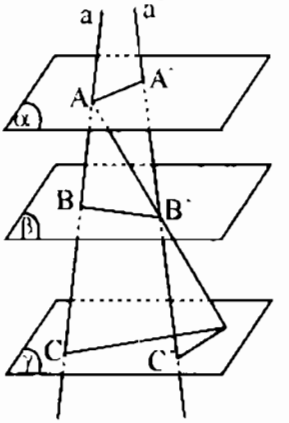
§ 5. BA MẶT PHẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định lí Talet thuận

Ba mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ (Hình 79).

$$(\alpha)//(\beta)//(\gamma) \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$



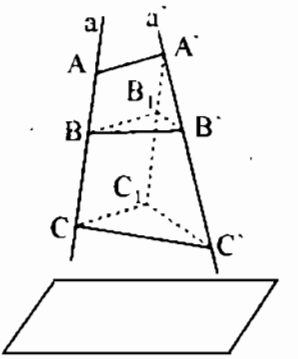
Hình 79

2. Định lí Talet đảo

Giả sử trên đường thẳng a cho ba điểm A, B, C sao cho B nằm giữa A và C còn trên đường thẳng a' chéo với a cho ba điểm A', B', C' sao cho B' nằm giữa A' và C' đồng thời thoả mãn điều kiện

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Khi đó ba đường thẳng AA', BB', CC' song song với cùng một mặt phẳng (Hình 80).



Hình 80

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Dạng 1. SỬ DỤNG CÁC MẶT PHẲNG SONG SONG CHẮN TRÊN HAI CÁT TUYẾN BẤT KÌ NHỮNG ĐOẠN THẲNG TỈ LỆ

Phương pháp

Dùng Định lí Talét trong không gian.

Ví dụ 1 : Một mặt phẳng (ω) cắt các cạnh AB, BC, CD, DA của một tứ diện ABCD lần lượt tại M, N, P, Q. Chứng minh rằng :

www.VNMATH.com

$$\frac{MA}{MB}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{PC}{PD}\cdot\frac{QD}{QA}=1$$

Hướng dẫn giải

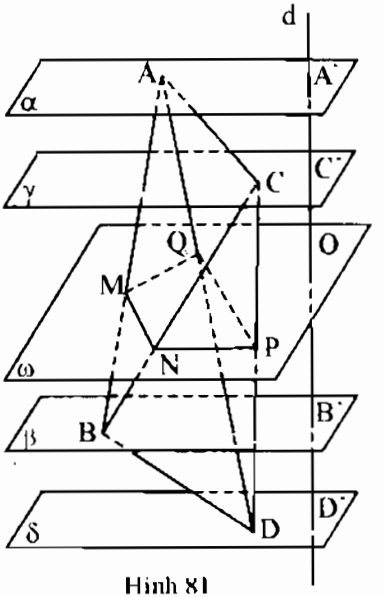
Ta dựng một đường thẳng d cắt mặt phẳng (ω) tại O. Qua A, B, C, D lần lượt dựng bốn mặt phẳng (α), (β), (γ), (δ) song song với (ω) và cắt d theo thứ tự tại A', B', C', D'. Theo Định lí Talét ta có :

$$\frac{MA}{MB}=\frac{OA'}{OB'};\ \frac{NB}{NC}=\frac{OB'}{OC'};$$

$$\frac{PC}{PD}=\frac{OC'}{OD'};\ \frac{QD}{QA}=\frac{OD'}{OA'}.$$

Suy ra : $\frac{MA}{MB}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{PC}{PD}\cdot\frac{QD}{QA}$

$=\frac{OA'}{OB'}\cdot\frac{OB'}{OC'}\cdot\frac{OC'}{OD'}\cdot\frac{OD'}{OA'}=1$ (Hình 81).



Hình 81

Ví dụ 2 : Cho tứ diện đều ABCD. Trên các đoạn AB và DC ta lần lượt lấy các điểm M, N sao cho AM = DN. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

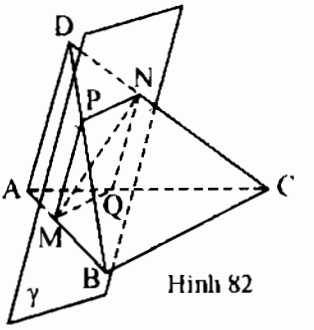
Hướng dẫn giải

Theo giả thiết ta có : $\frac{AM}{MB}=\frac{DN}{NC}$.

Gọi (γ) là mặt phẳng chứa MN song song với ca AD và CD. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của (γ) với DB và AC. Ta có MP // AD // NQ và MQ // BC // NP. Tứ giác MPNQ là một hình bình hành có các cạnh song song với AD và BC.

Ta có :

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AQ}{QC}=\frac{DN}{NC}=\frac{DP}{PB}$$ (Hình 82)



Hình 82

www.VNMATH.com

Gọi (α) là mặt phẳng chứa AD và song song với (γ) và (β) là mặt phẳng chứa BC và song song với (γ). Vậy ta có ba mặt phẳng (α), (β), (γ) song song với nhau trong đó (α) và (β) là hai mặt phẳng cố định chứa một trong hai đường thẳng chéo nhau AD, BC và song song với đường còn lại. Khi (γ) thay đổi nhưng luôn luôn song song với (α) và (β), giả sử (γ) cắt AB, DC, BD, AC lần lượt tại M', N', P', Q' theo Định lí Talet ta vẫn có :

$$\frac{AM'}{M'B} = \frac{AQ'}{Q'C} = \frac{DN'}{N'C} = \frac{DP'}{P'B}$$

Khi đó ta vẫn có AM' = DN'. Đường thẳng M'N' luôn luôn song song với (α) hoặc (β) cố định.

Dạng 2. CHO HAI ĐIỂM M, N DI ĐỘNG TRÊN HAI MẶT PHẲNG SONG SONG (P) VÀ (Q). TÌM TẬP HỢP NHỮNG ĐIỂM I CHIA ĐOẠN MN THEO MỘT TỈ SỐ k CHO TRƯỚC (CHIA TRONG HOẶC CHIA NGOÀI)

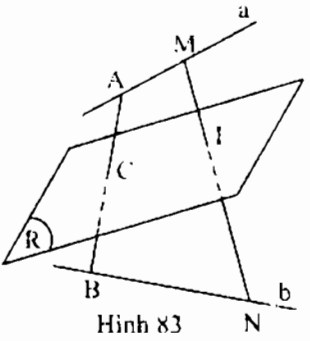
Phương pháp

Dùng Định lí Talét trong không gian.

Ví dụ 1 : Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Hai điểm M, N lần lượt di động trên a và b. Tìm tập hợp các điểm I chia trong (hoặc chia ngoài) đoạn MN theo một tỉ số k cho trước.

Hướng dẫn giải

Phần thuận . Gọi A, B là hai điểm cố định lần lượt nằm trên a và b chéo nhau cho trước, còn C là điểm chia trong đoạn AB theo tỉ số $k = \frac{CA}{CB}$. (Hình 83)



Hình 83

Nếu M, N là hai điểm di động lần lượt trên a, b và I là điểm chia trong đoạn MN theo tỉ số k thì theo Định lí Talet đảo AM, CI, BN cùng song song với một mặt phẳng. Nói cách khác CI phải nằm trong mặt phẳng song song với a, b và đi qua C. Vậy I nằm trong mặt phẳng (R) đi qua điểm C (với $\frac{CA}{CB} = k$), song song với a và b (Hình 83).

www.VNMATH.com

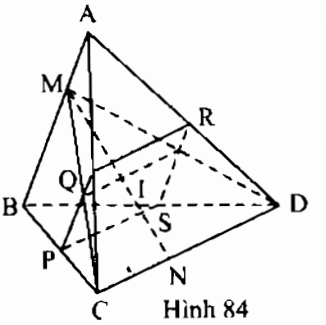
Phần đảo : Gọi I là một điểm bất kì trên (R). Hai mặt phẳng (I, a) và (I, b) có một giao tuyến d cắt cả a và b. Giả sử đường thẳng đó cắt a, b lần lượt tại M, N. Theo Định lí Talet thuận ta có ngay điểm I chia trong đoạn MN theo tỉ số k.

Kết luận : Tập hợp các điểm I chia trong đoạn MN theo tỉ số k với M, N lần lượt di động trên hai đường chéo nhau a và b là mặt phẳng R đi qua điểm C song song với a và b.

Ví dụ 2 : Cho tứ diện ABCD. Hai điểm M, N lần lượt di động trên hai cạnh AB và CD. Tìm tập hợp các trung điểm của đoạn MN.

Hướng dẫn giải

Phần thuận : Giả sử M nằm trên AB, N nằm trên CD và I là trung điểm của MN (Hình 84). Nếu ta gọi P là trung điểm của đoạn BC thì vì $\frac{PB}{PC} = \frac{IM}{IN} = 1$ nên BM, PI, CN cùng song song với một mặt phẳng. Nói cách khác, PI phải nằm trong mặt phẳng song song với hai đường thẳng AB, CD và đi qua P.



Hình 84

Vậy I nằm trong mặt phẳng đi qua P song song với AB và CD. Mặt phẳng này cắt tứ diện ABCD theo thiết diện là hình bình hành PQRS với Q, R, S lần lượt là trung điểm của AC, AD và BD.

Giới hạn : Vì M di động trên cạnh AB còn N di động trên cạnh CD nên điểm I luôn luôn nằm trong tứ diện ABCD.

Tóm lại điểm I luôn luôn nằm trong miền bình hành PQRS.

Phần đảo : Lấy một điểm bất kì trong miền hình bình hành PQRS. Qua I có một đường thẳng cắt hai cạnh AB và CD tại M và N. Theo định lí Talet thuận ta có ngay I là trung điểm của đoạn MN.

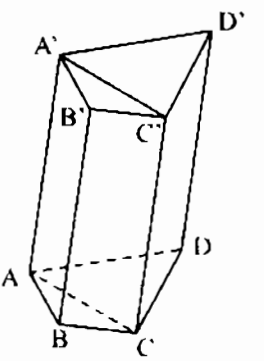
Kết luận : Tập hợp các điểm I trung điểm của đoạn MN với M, N lần lượt thuộc AB, CD là miền hình bình hành PQRS.

§ 6. HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Hình lăng trụ là một đa diện có hai mặt nằm trong hai mặt phẳng song song gọi là hai đáy và tất cả các cạnh không thuộc hai đáy đều song song với nhau.



Hình 85

Ví dụ : Xét hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D' (Hình 85)

ABCD, A'B'C'D' : hai đáy.

ABB'A', BCC'B', ... : các mặt bên.

AA', BB', ... : các cạnh bên.

ACC'A', BDD'B', ... : các mặt chéo.

Tuỳ theo đa giác đáy, ta có lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác ...

2. Tính chất

Hình lăng trụ có :

- Các cạnh bên song song và bằng nhau.

- Các mặt bên và các mặt chéo là những hình bình hành.

3. Hình hộp

Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành gọi là *hình hộp*. Trong hình hộp ABCD.A'B'C'D' (Hình 86) các đường chéo AC', A'C, BD', B'D cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

- Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình chữ nhật gọi là *hình hộp chữ nhật*.

- Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình vuông gọi là *hình lập phương*.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Dạng 1. SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC TÍNH CHẤT CỦA HÌNH LĂNG TRỤ

Phương pháp

– Nắm vững định nghĩa và các tính chất của hình lăng trụ.

– Xét vị trí tương đối của điểm, đường thẳng, mặt phẳng cho trên hình lăng trụ bằng cách sử dụng các tính chất của hình lăng trụ. Chú ý khai thác tính chất song song của các đường thẳng trên hình lăng trụ, phương pháp tìm giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng, sử dụng tính chất song song của hai mặt phẳng để tìm giao tuyến với mặt phẳng thứ ba.

Ví dụ 1 : Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có cạnh bên là AA', BB', CC'. Gọi I và I' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và B'C'.

a) Chứng minh AI // A'I'.

b) Tìm giao điểm của đường thẳng IA' với mặt phẳng (AB'C').

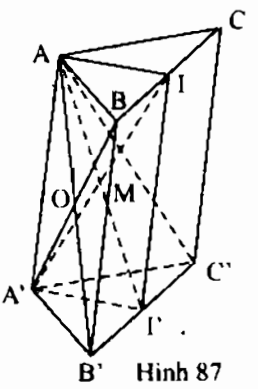
c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C').

Hướng dẫn giải

a) Ta có II' // BB' và II' = BB'. Do đó II' // AA' và II' = AA'. Vậy AA'II' là hình bình hành, suy ra AI // A'I'.

(Chú ý : Có thể dựa vào tính chất mp(ABC) // mp(A'B'C') nên khi cắt bởi mặt phẳng (AA', II') ta được AI // A'I'.

b) Trong mặt phẳng (AA', II'), IA' cắt AI' tại M. Vậy đường thẳng IA' cắt mặt phẳng (AB'C') tại M.



Hình 87

c) Gọi O = AB' ∩ A'B. Hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C') có O và C' là hai điểm chung nên chúng có giao tuyến là đường thẳng OC'.

Ví dụ 2 : Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có AA' // BB' // CC'. Gọi H là trung điểm của A'B'.

a) Chứng minh CB' song song với mặt phẳng (AHC').

b) Tìm giao điểm của AC' với mặt phẳng (BCH).

c) Gọi (α) là mặt phẳng qua trung điểm của CC' và song song với AH và CB'. Xác định các đoạn giao tuyến mà mặt phẳng (α) cắt các mặt của lăng trụ.

Hướng dẫn giải

a) Gọi K là trung điểm của cạnh AB ta có :

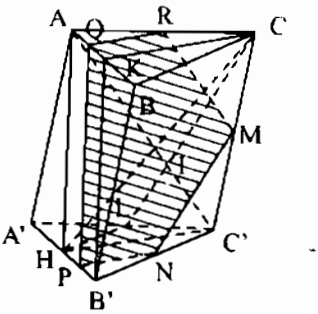
$$\begin{cases} B'K // AH \\ KC // HC' \end{cases} \Rightarrow mp(B'KC) // mp(AHC')$$

Mà $CB' \subset mp(B'KC) \Rightarrow CB' // mp(AHC')$. (Hình 88)

b) Mặt phẳng (BCH) cắt mp(A'B'C') theo giao tuyến HL song song với BC vì mp(ABC) // mp(A'B'C'). Nối CL cắt AC' tại I. Vậy I là giao điểm của AC' với mp(BCH).

c) Ta có :

$$\begin{cases} mp(B'KC) // mp(AHC') \\ (\alpha) // AH,\ \alpha // CB' \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (B'KC)$$



Hình 88

Do đó (α) cắt mp(BCC'B') theo đoạn giao tuyến MN // CB'. Mặt phẳng (α) cắt mp(A'B'C') theo đoạn giao tuyến NP // C'H. Tiếp tục ta có mp(α) cắt mp(AA'BB') theo đoạn giao tuyến PQ song song AH, cắt mp(ABC) theo đoạn giao tuyến QR // CK, cắt mp(AA'CC') theo đoạn giao tuyến RM. Ta được thiết diện là ngũ giác MNPQR.

Ví dụ 3 : Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' (AA' // BB' // CC' // DD').

a) Chứng minh hai mặt phẳng (BDA') và (B'D'C) là hai mặt phẳng song song.

b) Chứng minh đường chéo AC' đi qua các trọng tâm G_1, G_2 của hai tam giác BDA' và B'D'C. Chứng minh rằng G_1, G_2 chia đoạn AC' làm ba phần bằng nhau.

c) Hãy cắt hình hộp bởi mặt phẳng $(A'B'G_2)$. Xác định các đoạn giao tuyến và từ đó suy ra thiết diện là hình gì ?

Hướng dẫn giải

a) Gọi O và O' là hai tâm của các hình bình hành ABCD và A'B'C'D'. Ta có :

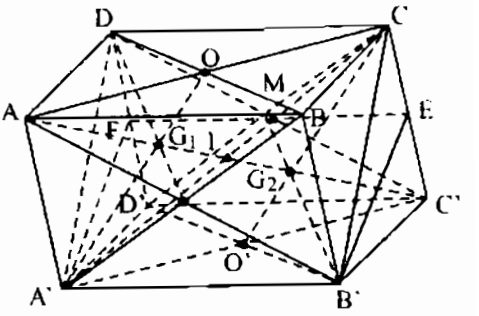
$$\begin{cases} BD // B'D' \\ A'D // B'C \end{cases} \Rightarrow mp(BDA') // mp(B'D'C) \text{ (Hình 89)}$$

b) Ba đoạn AC', OA', O'C cùng nằm trong mặt phẳng (AC, A'C') và có AC // A'C'.

Gọi $G_1 = AC' \cap A'O$

$G_2 = AC' \cap CO'$

Ta chứng minh G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BDA' và B'D'C.



Hình 89

Xét hai tam giác đồng dạng G_1AO và $G_1C'A'$ ta có $\frac{G_1O}{G_1A'} = \frac{AO}{C'A'} = \frac{1}{2}$. Mặt khác, A'O là trung tuyến của tam giác BDA'. Do đó G_1 là trọng tâm của tam giác BDA'.

Chú ý : Có thể chứng minh cách khác như sau :

Gọi $I = A'C \cap A'C$ ta có I là trung điểm của A'C. Ta có G_1 là trọng tâm của tam giác AA'C nên ta có $\frac{G_1O}{G_1A'} = \frac{1}{2}$ và suy ra G là trọng tâm của tam giác BDA'.

Tương tự, ta chứng minh được G_2 là trọng tâm của tam giác B'D'C.

c) Kéo dài $B'G_2$ cắt CD' tại M ta có M là trung điểm của CD' vì G_2 là trọng tâm của tam giác B'D'C. Mặt phẳng $(A'B'G_2)$ chứa A'B' // C'D' nên $mp(A'B'G_2)$ cắt mp(C'D'DC) theo giao tuyến EF qua I và EF // C'D'. Ta có các đoạn giao tuyến là A'B', B'E, EF, FA' và được thiết diện là một hình bình hành.

Dạng 2. THIẾT DIỆN CỦA LĂNG TRỤ

Phương pháp

Việc tìm thiết diện của lăng trụ bởi một mặt phẳng cũng được tiến hành tương tự như đối với hình chóp. Cần chú ý rằng hình lăng trụ có hai đáy song song, các mặt bên của lăng trụ là những hình bình hành ; các cạnh bên của lăng trụ song song và bằng nhau. Do đó ta có thể sử dụng các quan hệ song song để tìm các đoạn giao tuyến.

Ví dụ 1 : Cho hình lăng trụ tam giác $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 // BB_1 // CC_1$). Gọi M là một điểm nằm trên đường chéo AB_1 của mặt bên sao cho $\frac{AM}{MB_1} = \frac{5}{4}$. Xác định thiết diện của mặt phẳng (ω) qua M với lăng trụ biết rằng (ω) song song với A_1C và BC_1.

Hướng dẫn giải

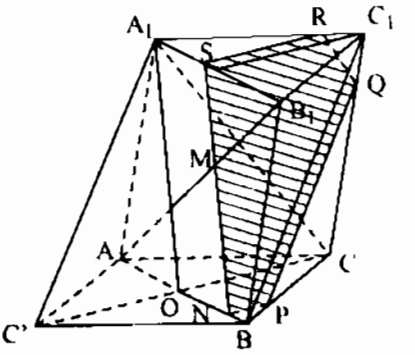
Gọi C' là điểm đối xứng của C qua trung điểm O của AB. Ta có ACBC' là hình bình hành và suy ra BC_1A_1C' cũng là hình bình hành. Do đó BC_1 song song $C'A_1$. Vậy mặt phẳng $(C'A_1C)$ song song với A_1C và BC_1.

Ta dựng mặt phẳng (ω) qua M và song song với mặt phẳng $(C'A_1C)$ nên $(\omega) // C'A_1$ và $(\omega) // A_1C$.

Vì $A_1O = mp(C'A_1C) \cap (ABB_1A_1)$ nên mp(ω) sẽ cắt mặt phẳng (ABB_1A_1) theo giao tuyến NS qua M và song song với A_1O. (Hình 90).

(ω) // OC nên (ω) cắt mp(ABC) theo giao tuyến NP // OC và cắt $mp(A_1B_1C_1)$ theo giao tuyến SR // OC // NP.

(ω) // $A_1C' // BC_1$ nên (ω) cắt (BCC_1B_1) theo giao tuyến PQ // BC_1.



Hình 90

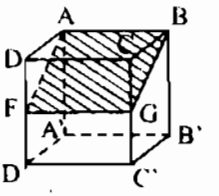
Ta được thiết diện cắt lăng trụ bởi mặt phẳng (ω) là hình ngũ giác NPQRS (Hình 90).

Ví dụ 2 : Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có sáu mặt đều là những hình vuông và các trung điểm E, F của các cạnh AB và DD'. Hãy tìm các thiết diện của hình lập phương cắt bởi các mặt phẳng (EFB), (EFC), (EFA'), (EFC') và (EFK) với K là trung điểm của cạnh B'C'.

Hướng dẫn giải

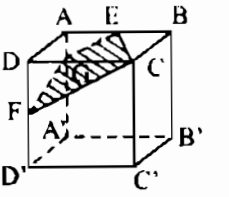
Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' :

a) Cắt bởi mặt phẳng (EFB) : Ta có ngay giao tuyến EB. Vì mp(AA', BB') song song mp(DD', CC') nên ta có giao tuyến FG // AB. Ta được thiết diện là hình chữ nhật ABGF (Hình 91).



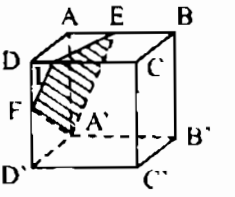
Hình 91

b) Cắt bởi mặt phẳng (EFC) : Ta có giao tuyến FC // GE vì đây là giao tuyến của hai mặt phẳng song cắt bởi mặt phẳng (EFC). Ta có thiết diện là hình thang ECFG (Hình 92).



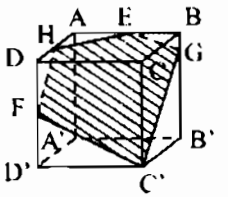
Hình 92

c) Cắt bởi mặt phẳng (EFA') : Ta có giao tuyến EA' // FI vì đây là giao tuyến của mp(AA', BB') và mp(DD', CC') song song với nhau cắt bởi mp(EFA'). Ta có thiết diện là hình thang FIEA' (Hình 93).



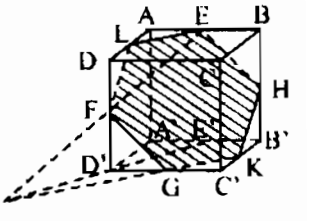
Hình 93

d) Cắt bởi mặt phẳng (EFC') : Ta có giao FC' // EG. Nối C'G và trong mp(AA'D'D) vẽ FH // C'G cắt AD tại H. Nối HE. Ta được thiết diện là hình ngũ giác FC'GEH (Hình 94).



Hình 94

e) Cắt bởi mặt phẳng (EFK). Gọi E' là trung điểm của đoạn A'B'. Gọi I = EF ∩ E'D'. Ta có IK là giao tuyến của mp(EFK) với mp(ABCD). Đường IK cắt D'C' tại G. Nối FG, trong mp(ABB'A') vẽ EH // FG cắt BB' tại H. Nối KH và vẽ FL // KH cắt AD tại L. Nối LE. Ta được thiết diện là hình lục giác đều vì có các cạnh bằng nhau EG = HF = KL và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (Hình 95).



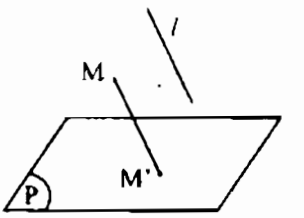
Hình 95

§ 7. PHÉP CHIẾU SONG SONG – HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phép chiếu song song – Định nghĩa

Cho mặt phẳng (P) và một đường thẳng l không song song với (P). Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng đi qua M có phương l sẽ cắt (P) tại một điểm M' xác định. Điểm M' gọi là *hình chiếu song song* của điểm M trên mặt phẳng (P) theo phương l (Hình 96).

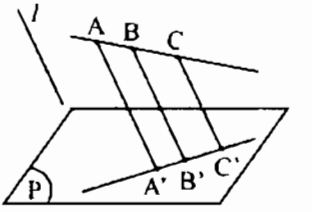


Hình 96

Nếu H là một hình nào đó thì tập hợp các hình chiếu M' của tất cả những điểm M thuộc H sẽ làm thành một hình H' nằm trên (P). Hình H' được gọi là hình chiếu của hình H qua phép chiếu song song nói trên.

2. Các tính chất của phép chiếu song song

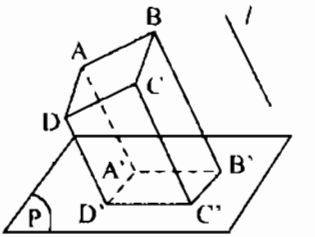
a) Phép chiếu song song biến ba điểm A, B, C thẳng hàng thành ba điểm A', B', C' thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó (Hình 97).



Hình 97

Ta suy ra : Hình chiếu song song của đường thẳng là đường thẳng, của tia là tia, của đoạn thẳng là đoạn thẳng (các đường thẳng, tia và đoạn thẳng này đều không song song với phương chiếu *l*).

b) Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

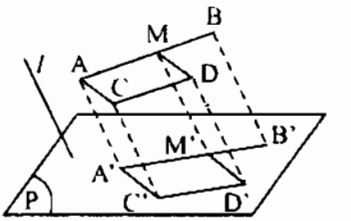


Hình 98

Ta suy ra hình chiếu song song của một hình bình hành không nằm trong mặt phẳng song song với phương chiếu là một hình bình hành (Hình 98).

c) Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hay trùng nhau (Hình 99) :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$



Hình 99

3. Hình biểu diễn H' của một hình H trong không gian

Hình biểu diễn H' của một hình H trong không gian là hình chiếu song song của hình H (hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó) lên một mặt phẳng nào đó theo một phương chiếu nào đó. Người ta thường dùng hình biểu diễn H' (là một hình phẳng) để minh hoạ cho một hình không gian.

Dạng 1. TÌM PHÉP CHIẾU SONG SONG CỦA MỘT HÌNH CHO TRƯỚC THOẢ MÃN MỘT SỐ ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

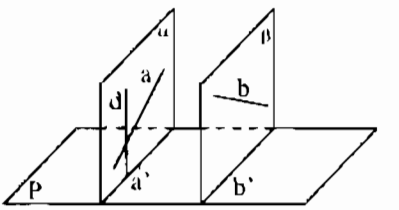
Phương pháp

Sử dụng các tính chất của phép chiếu song song.

Ví dụ 1 : Hãy chọn phép chiếu song song để hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau là hai đường thẳng song song.

Hướng dẫn giải

Cho a và b là hai đường thẳng chéo nhau. Gọi (α) là mặt phẳng chứa a và song song với b, (β) là mặt phẳng chứa b và song song với a. Gọi P là mặt phẳng cắt (α) và (β) theo hai giao tuyến a' và b'. Vì (α) // (β) nên a' // b'. Gọi d là một đường thẳng nằm trong (α) nhưng không song song với a và b và cắt (P). Khi đó phép chiếu song song chiếu lên mặt P theo phương d, hai đường thẳng chéo nhau a và b có hình chiếu là a' và b' song song với nhau (Hình 100).

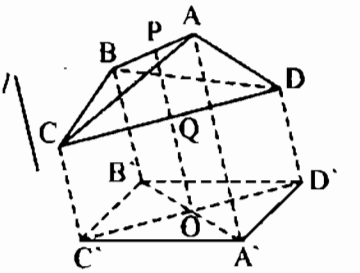


Hình 100

Ví dụ 2 : Hãy chứng tỏ rằng có thể chọn phương chiếu và mặt phẳng chiếu thích hợp để hình chiếu song song của một tứ diện là một hình bình hành, một hình tam giác.

Hướng dẫn giải

Giả sử A'B'C'D' là hình chiếu song song của tứ diện ABCD. Gọi P là trung điểm của cạnh AB và Q là trung điểm của cạnh CD. Muốn cho A'B'C'D' là hình bình hành ta chỉ cần chọn phương chiếu sao cho P' và Q' là hình chiếu của P, Q trùng nhau. Như vậy, nếu chọn phương chiếu l là phương của đường thẳng PQ và mặt phẳng chiếu (α) cắt l thì hình chiếu song song của tứ diện ABCD là hình bình hành A'B'C'D' (Hình 101). Tóm lại ta có thể chọn :



Hình 101

– Phương chiếu l là phương của một trong ba đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh đối diện của hình tứ diện.

Mặt phẳng chiếu (α) là mặt phẳng tuỳ ý cắt đường thẳng l.

Muốn được hình chiếu song song của một tứ diện là một tam giác ta chỉ cần chọn phương chiếu sao cho trùng với phương của cạnh tứ diện. Như vậy, ta có 6 cách lựa chọn khác nhau và khi đó ta sẽ có hai đỉnh của tứ diện có chung một hình chiếu.

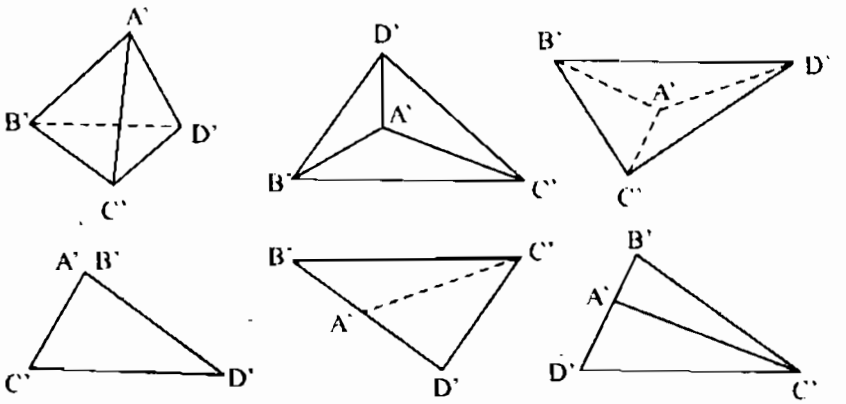
Dạng 2. VẼ HÌNH CHIẾU CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

Phương pháp

Chọn phương chiếu và mặt phẳng chiếu thích hợp đồng thời bảo đảm được những tính chất thay đổi và không thay đổi của phép chiếu song song.

Ví dụ 1 : Hãy vẽ các dạng hình biểu diễn có thể có đối với một hình tứ diện đều ABCD.

Hướng dẫn giải

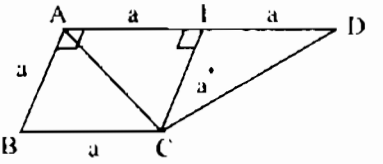


Hình 102

Ví dụ 2 : Hãy vẽ hình biểu diễn của một hình thang ABCD vuông tại A và B, có các cạnh AB = BC = a, AD = 2a. Hãy vẽ hình biểu diễn đường phân giác của góc ACD.

Hướng dẫn giải

Hình biểu diễn của hình thang được biểu thị bằng hình vẽ ở hình 103. Hình biểu diễn phải thoả mãn các yêu cầu sau đây : BC // AD và AD 2BC.



Hình 103

Chú ý :

– Các góc $\hat{A}$ và $\hat{B}$ có thể vẽ không cần bằng nhau mặc dầu trong hình thực chúng đều là những góc bằng góc vuông.

– Các độ dài AB và BC có thể vẽ không cần bằng nhau. Hình biểu diễn đường phân giác các góc ACD là CI phải đi qua trung điểm I của cạnh AD vì ACD là tam giác vuông cân tại C (CA = CD). Do đó CI cũng biểu diễn cho đường cao phát xuất từ đỉnh C của tam giác ACD đồng thời cũng là đường trung tuyến phát xuất từ đỉnh C đó.

C. LUYỆN TẬP

2.1 Cho hình vuông ABCD và ABEF có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC, BF ta lần lượt lấy các điểm M, N sao cho AM = BN. Mặt phẳng (α) chứa MN và song song với AB cắt AD và AF lần lượt tại M' và N'.

a) Tứ giác MNN'M' là hình gì ?

b) Chứng minh M'N' song song với EC.

c) Chứng minh MN song song với mặt phẳng (DEF).

2.2 Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Trên cạnh AD ta lấy một điểm M và gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAB). Mặt phẳng (α) cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q.

a) Chứng minh MNPQ là hình thang.

b) Gọi I = MQ $\cap$ NP. Điểm I chạy trên đường nào khi M chạy từ A đến D ?

2.3 Cho hình chóp S.ABCD. Tứ giác đáy có AB $\cap$ CD = E, AD $\cap$ BC = F, AC $\cap$ BD = G. Gọi (α) là mặt phẳng cắt SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'.

a) Tìm giao điểm D' của SD với mặt phẳng (α).

b) Tìm điều kiện của (α) để A'B' // C'D' ?

c) Với điều kiện nào của (α) thì A'B'C'D' là hình bình hành ?

2.4 Cho hai nửa đường thẳng Ax và By chéo nhau. Hai điểm M và N lần lượt di động trên Ax và By sao cho AM = BN. Chứng minh rằng đường thẳng MN khi di động luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

2.5 Cho hình lăng trụ tứ giác ABCD.A'B'C'D'.

a) Chứng minh hai đường chéo AC' và A'C cắt nhau tại một điểm M, hai đường chéo BD' và B'D cắt nhau tại một điểm N.

b) Chứng minh rằng độ dài khoảng cách giữa các giao điểm M, N của hai cặp đường chéo nói trên bằng độ dài đoạn nối trung điểm của hai đường chéo đáy.

c) Tìm thiết diện cắt bởi mặt phẳng chứa M, N và song song với hai đáy của lăng trụ.

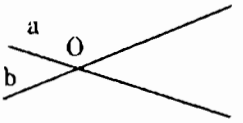
Chương 3.
QUAN HỆ VUÔNG GÓC

§8. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Góc giữa hai đường thẳng cắt nhau

Hai đường thẳng a, b cắt nhau tại O tạo thành bốn góc. Số đo của góc nhỏ nhất trong bốn góc đó gọi là số đo góc hợp bởi hai đường thẳng a, b. Kí hiệu là $(\widehat{a, b})$ hay $(\widehat{b, a})$ (Hình 104).



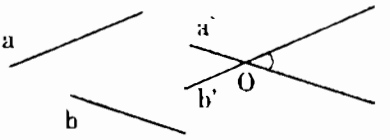
Hình 104

Đặt biệt khi a và b trùng nhau ta có $(\widehat{a, b}) = 0^o$ và khi a và b vuông góc ta có $(\widehat{a, b}) = 90^o$. Như vậy $0^o \le (\widehat{a, b}) \le 90^o$.

2. Góc giữa hai đường thẳng bất kì trong không gian

Định nghĩa :

Góc giữa hai đường thẳng a, b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng cắt nhau a', b' lần lượt song song với a, b (Hình 105).



Hình 105

3. Hai đường thẳng vuông góc

Định nghĩa :

Hai đường thẳng a, b gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^o và kí hiệu $a \perp b$ hay $b \perp a$.

$$a \perp b \Rightarrow (\widehat{a, b}) = 90^o$$

4. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của hai đường thẳng

Định lí :

Cho hai đường thẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì vuông góc với đường thẳng thứ hai

$$\begin{cases} a // b \\ c \perp a \end{cases} \Rightarrow c \perp b$$

Chú ý : Trong mặt phẳng hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau, nhưng trong không gian hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì không phải khi nào cũng song song với nhau.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Dạng 1. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI NHAU TRONG KHÔNG GIAN.

Phương pháp

Sử dụng định nghĩa góc của hai đường thẳng.

Ví dụ 1 : Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Chứng minh AO ⊥ CD.

Hướng dẫn giải

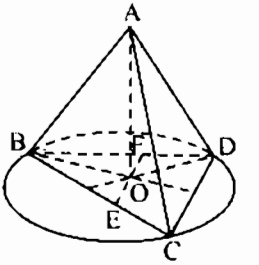
Qua O vẽ đường thẳng song song với CD cắt BC tại E, cắt BD tại F. Cần chứng minh AO ⊥ EF.

Ta có $\widehat{AOE} = (\widehat{AO, CD})$ (Hình 106)

Vì EF // CD nên BEF là tam giác đều nên BE = BF và OE = OF.

ΔABE = ΔABF (c.g.c) ⇒ AE = AF.

Tam giác AEF cân có trung tuyến AO cũng là đường cao nên $\widehat{AOE} = 90^0$. Do đó $(\widehat{AO, CD}) = 90^0$.



Hình 106

Dạng 2. TÍNH GÓC CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Phương pháp

Sử dụng định nghĩa góc của hai đường thẳng trong không gian.

Ví dụ : Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD. Hãy tính góc của hai đường thẳng AB và CD biết AB = CD = 2a và MN = $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Gọi P là trung điểm của BD, ta có :

$$MP // CD \text{ và } MP = \frac{CD}{2} = a.$$

$$NP // AB \text{ và } NP = \frac{AB}{2} = a$$

Ta có : $(\widehat{AB, CD}) = (\widehat{PM, PN})$

Suy ra : $\cos(\widehat{AB, CD}) = \cos(\widehat{PM, PN})$

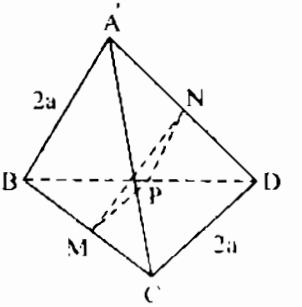
Nhưng :

$$\left|\cos(\widehat{PM, PN})\right| = \frac{\left|PM^2 + PN^2 - MN\right|}{2PM.PN}$$

$$= \frac{\left|a^2 + a^2 - 3a^2\right|}{2a^2} = \frac{1}{2}$$

Suy ra : $(\widehat{PM, PN}) = 60^0$

Vậy : $(\widehat{AB, CD}) = 60^0$.



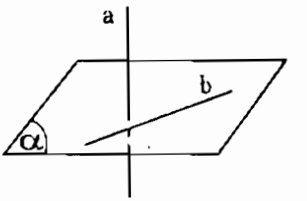
Hình 107

§ 9. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Một đường thẳng a gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) và được kí hiệu $a \perp (\alpha)$ hay $(\alpha) \perp a$ (Hình 108).

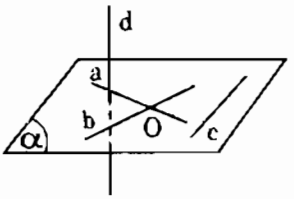


Hình 108

2. Các định lí

Định lí 1 :

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng a, b cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P) thì d vuông góc với mọi đường thẳng c nằm trong (P) (Hình 109).



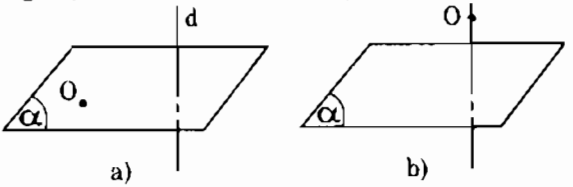
Hình 109

Định lí 2 :

Qua một điểm O cho trước có một mặt phẳng duy nhất vuông góc với đường thẳng d cho trước (Hình 110a).

Định lí 3 :

Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng (α) cho trước (Hình 110b).



Hình 110

3. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc – Các tính chất.

Tính chất 1 :

Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

Tính chất 2 :

Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

Tính chất 3 :

Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Tính chất 4 :

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Tính chất 5 :

Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng không chứa đường thẳng đó cùng vuông góc với một đường thẳng thì đường thẳng và mặt phẳng cho trước song song với nhau.

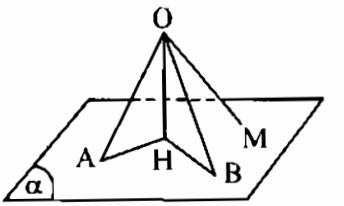
4. Đường vuông góc và đường xiên

a) Phép chiếu vuông góc :

Phép chiếu song song trong đó phương chiếu vuông góc với mặt phẳng chiếu gọi là *phép chiếu vuông góc*. Phép chiếu vuông góc có đầy đủ các tính chất của phép chiếu song song.

b) Đoạn vuông góc, đoạn xiên :

Cho mặt phẳng (α) và một điểm O không thuộc (α). Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên (α). Đoạn OH gọi là *đoạn vuông góc* vẽ từ điểm O đến mặt phẳng (α). Gọi M là một điểm bất kì trong (α) khác với H. Đoạn OM gọi là *đoạn xiên* (Hình 111).



Hình 111

Định lí :

Nếu một điểm O nằm ngoài mặt phẳng (α) ta vẽ đoạn vuông góc OH và các đoạn xiên OA, OB thì :

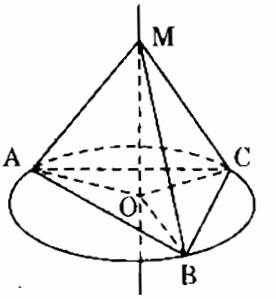
* Đoạn vuông góc OH ngắn hơn mọi đoạn xiên ;

* $OA = OB \Leftrightarrow HA = HB$;

* $OA > OB \Leftrightarrow HA > HB$.

c) Trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác :

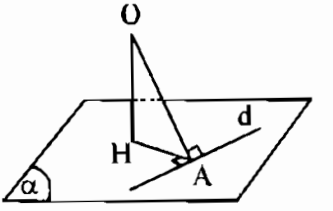
Tập hợp những điểm cách đều ba đỉnh của một tam giác là đường thẳng qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác và vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác đó. Đường thẳng này được gọi là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác hay gọi tắt là trục của tam giác đó. (Hình 112).



Hình 112

d) Định lí ba đường vuông góc :

Nếu đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (α) đường xiên OA có hình chiếu vuông góc lên (α) là HA, khi đó ta có (Hình 113) :



Hình 113

$OA \perp d \Leftrightarrow HA \perp d$

e) Góc giữa đường xiên và mặt phẳng :

Góc giữa đường xiên d và mặt phẳng (α) là góc nhọn tạo bởi đường xiên và hình chiếu vuông góc của nó lên (α).

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Dạng 1. CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Phương pháp

Muốn chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (α) ta thường dùng một trong hai cách sau :

Cách 1 : Chứng minh a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau chứa trong (α).

Cách 2 : Chứng minh a song song với một đường thẳng b mà b vuông góc với (α).

Ví dụ 1 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên SB, SC, SD.

a) Chứng minh rằng $BC \perp mp(SAB)$, $CD \perp mp(SAD)$, $BD \perp mp(SAC)$.

b) Chứng minh $SC \perp mp(AHK)$ và điểm I cũng thuộc mặt phẳng (AHK) đó.

c) Chứng minh rằng $HK \perp mp(SAC)$ từ đó suy ra $HK \perp AI$.

Hướng dẫn giải

a) $BC \perp AB$ vì ABCD là hình vuông.

$BC \perp SA$ vì $SA \perp mp(ABCD)$ và $BC \subset mp(ABCD)$.

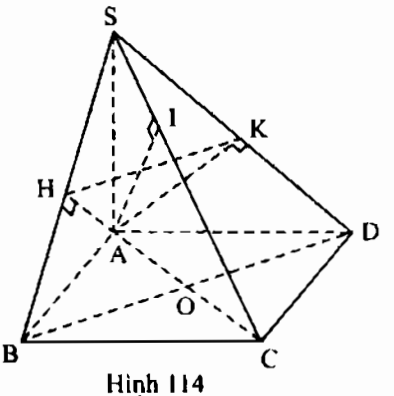
Do đó $BC \perp mp(SAB)$ (Hình 114).

Lí luận tương tự ta có $CD \perp AD$ và $CD \perp SA$ nên $CD \perp mp(SAD)$.

Ta có $BD \perp AC$ vì chúng là hai đường chéo của hình vuông và $BD \perp SA$ nên ta suy ra $BD \perp mp(SAC)$.

b) $BC \perp mp(SAB)$ mà $AH \subset mp(SAB)$ nên $BC \perp AH$ và theo giả thiết $SB \perp AH$ suy ra $AH \perp mp(SBC)$. Mà $SC \subset mp(SBC)$ nên $AH \perp SC$.

Lập luận tương tự ta chứng minh được AK ⊥ SC. Hai đường thẳng AH, AK cắt nhau và cùng vuông góc với SC nên chúng nằm trong mặt phẳng qua A và vuông góc với SC. Vậy SC ⊥ mp(AHK). Ta có AI ⊂ mp(AHK) vì nó đi qua A và cùng vuông góc với SC.



Hình 114

c) $SA \perp mp(ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AD \end{cases}$

Hai tam giác vuông SAB và SAD bằng nhau vì chúng có cạnh SA chung và AB = AD (c.g.c). Do đó :

SB = SD, SH = SK nên HK // BD.

Vì BD ⊥ mp(SAC) nên HK ⊥ mp(SAC)

Do AI ⊂ mp(SAC) nên HK ⊥ AI.

Ví dụ 2 : Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O và có SA = SC, SB = SD.

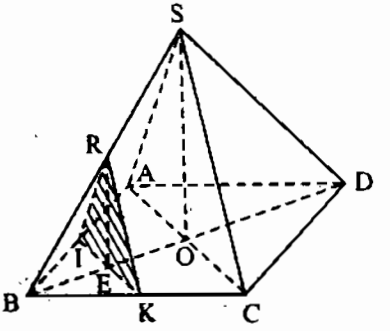
a) Chứng minh SO ⊥ mp(ABCD)

b) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của các cạnh BA, BC. Chứng minh rằng IK ⊥ mp(SBD) và IK ⊥ SD.

c) Gọi (α) là mặt phẳng chứa IK và song song với SO. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α). Hãy chứng tỏ (α) ⊥ BD.

Hướng dẫn giải

a) O là tâm hình thoi ABCD nên O là trung điểm của đoạn AC. Tam giác SAC có SA = SC nên SO ⊥ AC. Chứng minh tương tự ta có SO ⊥ BD. Do đó SO ⊥ mp(ABCD). (Hình 115).



Hình 115

b) Vì ABCD là hình thoi nên AC ⊥ BD. Mặt khác, ta có AC ⊥ SO. Do đó AC ⊥ mp(SBD). Ta có IK là đường trung bình của tam giác BAC nên IK // AC mà AC ⊥ mp(SBD) nên IK ⊥ mp(SBD).

Ta lại có SD ⊂ mp(SBD) nên IK ⊥ SD.

c) IK cắt BO tại E. Mặt phẳng (α) chứa IK nên (α) // AC. Hơn nữa (α) còn song song với SO nên mặt phẳng (α) song song mp(SAC). Do đó mặt phẳng (α) cắt các mặt bên (SAB) và (SBC) theo các giao tuyến IR // AS và KR // CS. Ta được thiết diện là hình tam giác IKR với R là trung điểm của cạnh SB. Vì mp(SAC) ⊥ BD mà mp(α) // mp(SAC) nên ta suy ra (α) ⊥ BD.

Dạng 2. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI NHAU

Phương pháp

Muốn chứng minh đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b ta thường dùng các cách sau :

– *Cách 1 :* Chứng minh đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng kia.

– *Cách 2 :* Nếu hai đường thẳng ấy cắt nhau thì ta có thể áp dụng các phương pháp chứng minh vuông góc đối với hai đường thẳng đã được học trong hình học phẳng.

– *Cách 3 :* Dùng định lí ba đường vuông góc.

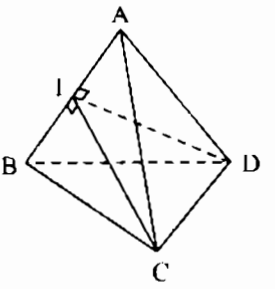
Ví dụ 1 : Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Chứng minh các cặp cạnh đối diện của tứ diện này vuông góc với nhau từng đôi một.

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của cạnh AB. Ta có :

$$\begin{cases} CI \perp AB \\ DI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp mp(CDI)$$

Mà CD ⊂ mp(CDI) nên AB ⊥ CD (Hình 116)



Hình 116

Bằng lập luận tương tự ta chứng minh được :

BC ⊥ AD, AC ⊥ BD.

Ví dụ 2 : Cho hình chóp SABCD có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D với $AD = DC = \frac{AB}{2}$. Gọi I là trung điểm của AB.

a) Chứng minh CI ⊥ SB và DI ⊥ SC.

b) Chứng minh các mặt bên của hình chóp SABCD là các tam giác vuông.

Hướng dẫn giải

a) $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp mp(SAB)$

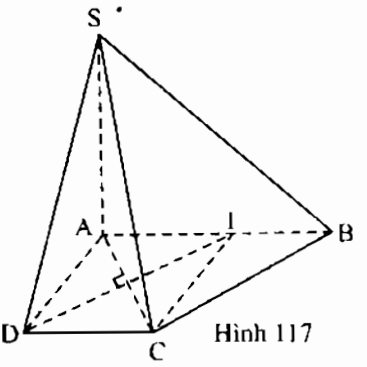
Vì I là trung điểm của AB nên ta có ADCI là hình vuông và CI // AD.

Do đó CI ⊥ mp(SAB) mà SB ⊂ mp(SAB) nên CI ⊥ SB.

Ta có :

$$\begin{cases} DI \perp AC \\ DI \perp SA \end{cases} \Rightarrow DI \perp mp(SAC)$$

Mà SC ⊂ mp(SAC) nên DI ⊥ SC (Hình 117)



Hình 117

b) Vì SA ⊥ mp(ABCD) nên các tam giác SAB và SAD vuông tại A.

Xét tam giác SCD :

$$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp mp(SAD) \Rightarrow CD \perp SD$$

Vậy tam giác SCD vuông tại D.

Xét tam giác SCB : Tam giác BCDI là hình bình hành vì có IB // CD và IB = CD. Do đó CB // ID mà ID ⊥ AC nên CB ⊥ AC. Mặt khác CB ⊥ SA. Ta suy ra CB ⊥ mp(SAC) ⇒ CB ⊥ SC. Vậy tam giác SBC vuông góc tại C.

Ví dụ 3 : Cho góc xOy nằm trong mặt phẳng (α). Trên đường thẳng Oz vuông góc với mặt phẳng (α) tại O lấy một điểm C, trên đường thẳng Ox lấy điểm A và trên đường thẳng Oy lấy điểm B.

a) Chứng minh tứ diện OABC có ba cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.

b) Từ O vẽ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H. Chứng minh H là trực tâm của tam giác ABC.

c) Chứng minh rằng $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Hướng dẫn giải

a) $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp mp(OBC)$

Mà BC ⊂ mp(OBC) ⇒ OA ⊥ BC

Chứng minh tương tự ta có : $OB \perp CA$, $OC \perp AB$ (Hình 118).

b) Ta có $OH \perp mp(ABC)$ tại H.

Gọi $C' = AB \cap CH$.

Vì $\begin{cases} OH \perp mp(ABC) \\ AB \subset mp(ABC) \end{cases} \Rightarrow AB \perp OH$

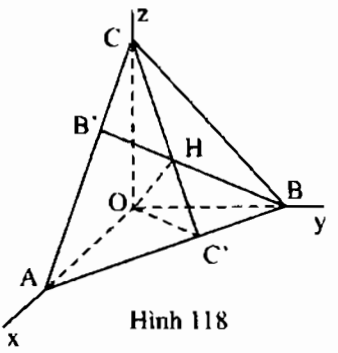
Theo câu a) ta có :

$$\begin{cases} AB \perp OH \\ AB \perp OC \end{cases} \Rightarrow AB \perp mp(OHC)$$

Mà $CH \subset mp(OHC)$ nên $AB \perp CH$ tại C'.

Gọi $B' = AC \cap BH$. Chứng minh tương tự ta có $BH \perp AC$ tại B'.

Trong tam giác ABC ta có CH và BH là hai đường cao, vậy H là trực tâm của tam giác ABC.



Hình 118

c) Trong tam giác AOB vuông tại O ta có OC' là đường cao vì ta chứng minh được $OC' \perp AB$ ($AB \perp CC'$, $AB \perp OC$, nên $AB \perp mp(OCC') \Rightarrow AB \perp OC'$). Từ đó dựa vào hệ thức lượng trong tam giác vuông của hình học phẳng ta có :

$$\frac{1}{OC'^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$

Trong tam giác OCC' vuông tại O (vì $OC \perp mp(\alpha)$ chứa OC' ta có OH là đường cao (vì $OH \perp mp(ABC)$ nên $OH \perp CC'$) nên :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OC'^2} + \frac{1}{OC^2}$$

Do đó $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Ví dụ 4 : Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng sao cho $\widehat{xOz} = \widehat{zOy} = \alpha$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Gọi M là một điểm trên Oz có hình chiếu vuông góc lên mặt phẳng (xOy) là H.

a) Chứng minh H thuộc đường phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

b) Cho $\widehat{xOy} = \beta$. Chứng minh $\frac{\beta}{2} < \alpha$.

c) Cho OM = a. Hãy tính độ dài MH theo a, α, β.

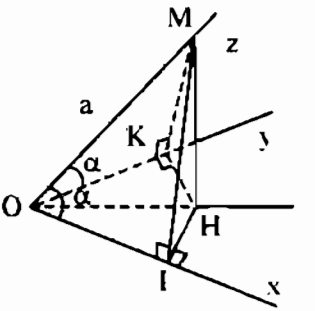
Hướng dẫn giải

a) Trong mặt phẳng (xOy) dựng HI $\perp$ Ox và HK $\perp$ Oy

Theo định lí ba đường vuông góc ta có :

MI $\perp$ Ox và MK $\perp$ Oy.

Hai tam giác vuông OMI và OMK bằng nhau vì có $\widehat{MOI} = \widehat{MOK} = \alpha$ và cạnh huyền OM chung. Do đó MI = MK. Đây là hai đoạn xiên bằng nhau nên có hai hình chiếu bằng nhau nghĩa là HI = HK.



Hình 119

Vậy điểm H thuộc đường phân giác của góc $x\hat{O}y$ (Hình 119).

b) Xét tam giác vuông OHI và OMI ta có :

$$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{HI}{OI} \text{ và } \tan\alpha = \frac{MI}{OI}.$$

c) Xét tam giác OIM ta có OI = acosα. Đối với tam giác vuông OHI ta có :

$$OH^2 = OI^2 + HI^2 = a^2\cos^2\alpha\left(OI\tan\frac{\beta}{2}\right)^2$$

$$= a^2\cos^2\alpha + a^2\cos^2\alpha\tan^2\frac{\beta}{2} = a^2\cos^2\alpha\left(1+\tan^2\frac{\beta}{2}\right)$$

Xét tam giác vuông MOH ta có :

$$MH^2 = OM^2 - OH^2 = a^2 - a^2\cos^2\alpha\left(1+\tan^2\frac{\beta}{2}\right)$$

$$= a^2\left[1-\cos^2\alpha\left(1+\tan^2\frac{\beta}{2}\right)\right]$$

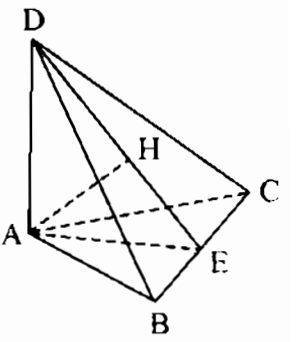
Vậy : $MH = a\sqrt{1-\cos^2\alpha\left(1+\tan^2\frac{\beta}{2}\right)}$

Ví dụ 5. Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC). AC = AD = 4cm ; AB = 3cm ; BC = 5cm. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BCD).

(Trích đề thi tuyển sinh Đại học Khối D, năm 2002)

Hướng dẫn giải

Cách 1 : Tam giác ABC có $AB = 3(cm)$; $AC = 4(cm)$ và $BC = 5cm$ nên vuông ở A, hay $AB \perp AC$. Lại có $AD \perp mp(ABC)$ nên $AD \perp AB$; $AD \perp AC$; $AD \perp BC$



Hình 120

Gọi AE là đường cao của tam giác ABC. Ta có $BC \perp AE$ và $BC \perp AD$ nên $BC \perp mp(ADE)$

Gọi AH là đường cao của tam giác ADE, ta có $\begin{cases} AH \perp DE \\ AH \perp BC \ (Vì\ BC \perp mp(ADE)) \end{cases}$ nên có $AH \perp mp(BCD)$

Do đó $AH = d(A;(BCD))$

Trong tam giác vuông ADE có : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AD^2}$

Trong tam giác vuông ABC có : $\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} \Rightarrow AH = \frac{6\sqrt{34}}{11}$$

Vậy $d(A;(BCD)) = \frac{6\sqrt{34}}{11}$.

Cách 2 : Tam giác ABC có $AB = 3(cm)$, $AC = 4(m)$, $BC = 5(cm)$ nên ΔABC vuông ở A. Vì $AD \perp mp(ABCD)$. Do đó gọi V là thể tích khối tứ diện $(ABCD)$ thì $V = \frac{1}{6} AB.AC.AD = 8$. Ta cũng có $V = \frac{1}{3} AH S_{BCD}$ mà $S_{BCD} = 2\sqrt{34}$. Do đó : $AH = \frac{6\sqrt{34}}{7}$

Vậy $d(A;(BCD)) = \frac{6\sqrt{34}}{7}$.

Dạng 3. TÌM THIẾT DIỆN QUA MỘT ĐIỂM CHO TRƯỚC VÀ VUÔNG GÓC VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

Phương pháp

Giả sử cần xác định thiết diện của một khối đa diện cắt bởi một mặt phẳng (α) đi qua một điểm M và vuông góc với một đường thẳng d cho trước, ta làm như sau :

– Dựng hai đường thẳng cắt nhau cùng vuông góc với d trong đó có ít nhất một đường qua điểm M. Mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng nói trên chính là (α). Sau đó ta cần tìm giao tuyến của (α) với các mặt của khối đa diện.

- Nếu có sẵn hai đường thẳng cắt nhau hay chéo nhau a, b cùng vuông góc với d thì ta chọn (α) // a (hay chứa a) và (α) // b (hay chứa b) rồi thực hiện tiếp các bước còn lại.

Ví dụ 1 : Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B với AB = BC = a, AD = 2a. Cạnh SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng ABCD. Gọi M là một điểm trên cạnh AB với AM = x ($0 < x < a$) và (α) là mặt phẳng qua M vuông góc với AB.

a) Tìm thiết diện của hình chóp SABCD cắt bởi mặt phẳng (α). Thiết diện là hình gì ?

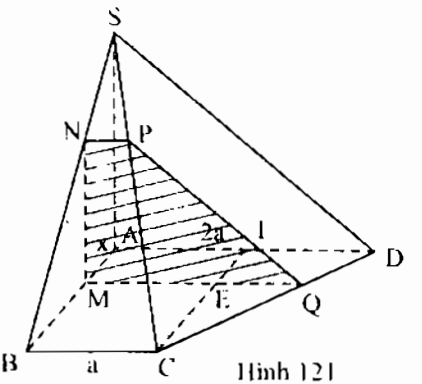
b) Tính thiết diện theo a và x.

Hướng dẫn giải

a) Ta có : SA $\perp$ AB vì SA $\perp$ mp(ABCD)

Ngoài ra, theo giả thiết : AD $\perp$ AB

Suy ra : AB $\perp$ mp(SAD)



Hình 121

Ta suy ra (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với mp(SAD), khi đó (α) $\perp$ AB. Từ M là điểm chung của (α) với mp(SAB) vẽ MN // SA cắt SB tại N. Tương tự, ta có giao tuyến của (α) với hai mặt phẳng (ABCD) và (SBC) lần lượt là MQ (Q $\in$ CD) và NP (P $\in$ SC) cùng song song với BC (BC // AD). Mặt phẳng (α) và (SCD) có hai điểm chung là P và Q nên chúng có giao tuyến là PQ. Vậy thiết diện là hình thang MNPQ (MQ // NP // BC). Vì MQ // BC, MN // SA và SA $\perp$ BC ta suy ra MQ $\perp$ MN. Do đó thiết diện là hình thang vuông tại M và N.

b) Gọi S là diện tích của thiết diện MNPQ ta có :

$$S = \frac{1}{2}(MQ + NP)MN \text{ (Hình 121)}$$

Xét tam giác SAB và SBC ta có :

$$\frac{MN}{SA} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow MN = \frac{SA.BM}{BA} = \frac{2a(a-x)}{a} = 2(a-x)$$

$$\frac{NP}{BC} = \frac{SN}{SB} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow NP = \frac{BC.AM}{AB} = \frac{a.x}{a} = x$$

Xét hình thang ABCD : Gọi I là trung điểm của AD, ta có CI ⊥ MQ và gọi E = MQ ∩ CI. Vì MQ // AD nên ta có :

$$\frac{EQ}{ID} = \frac{CE}{CI} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow EQ = \frac{ID.BM}{BA} = \frac{a(a-x)}{a} = a - x$$

$$MQ = ME + EQ = a + a - x = 2a - x.$$

Vậy : $S = \frac{1}{2}(MQ + NP)MN$

$$= \frac{1}{2}[(2a - x) + x].2(a - x) = 2a(a - x)$$

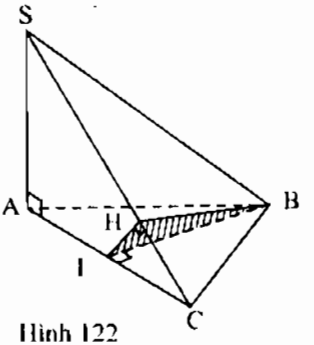
Ví dụ 2 : Cho tứ diện SABC có ABC là tam giác đều cạnh a và cạnh SA = 2a vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi (α) là mặt phẳng qua B và vuông góc với SC. Tìm thiết diện của tứ diện SABC cắt bởi mặt phẳng (α) và hãy tính diện tích của thiết diện này.

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của AC ta có BI ⊥ AC.

Mặt khác BI ⊥ SA nên BI ⊥ mp(SAC).

Do đó BI ⊥ SC. Vẽ IH ⊥ SC tại H ta có SC ⊥ mp(BIH). Vậy mp(α) chính là mp(BIH). Vì BI ⊥ mp(SAC) và IH ⊂ mp(SAC) nên BI ⊥ HI (Hình 122).



Hình 122

Do đó thiết diện là tam giác BIH vuông tại I. Gọi S là diện tích tam giác BIH ta có $S = \frac{1}{2}BI.IH$ mà $BI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Hai tam giác vuông CIH và CAS có góc nhọn C chung nên chúng đồng dạng với nhau. Ta có :

$$\frac{IH}{SA}=\frac{CI}{CS}\Rightarrow IH=\frac{CI.SA}{CS}=\frac{CI.SA}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\frac{\frac{a}{2}.2a}{\sqrt{4a^2+a^2}}=\frac{a\sqrt{5}}{5}$$

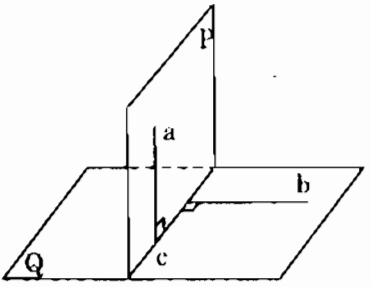
Vậy : $S=\frac{1}{2}BI.IH=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{5}=\frac{a^2\sqrt{15}}{20}$.

§ 10. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Hai mặt phẳng (P) và (Q) gọi là vuông góc với nhau nếu một trong hai mặt phẳng đó chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia. Ta kí hiệu $(P)\perp(Q)$ hoặc $(Q)\perp(P)$.



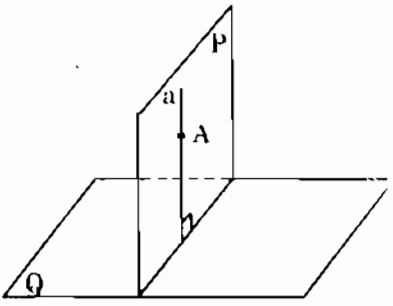
Hình 123

2. Các tính chất

Định lí 1 :

Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia (Hình 123).

$$\begin{cases}(P)\perp(Q)\\(P)\cap(Q)=c\\a\subset P \text{ và } a\perp c\end{cases}\Rightarrow a\perp(Q)$$

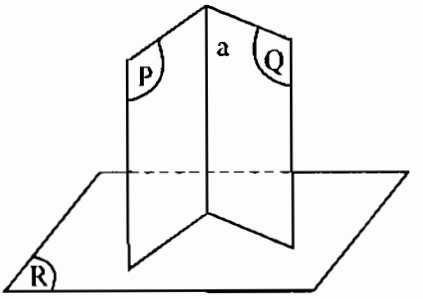


Hình 124

Định lí 2 :

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm nằm trên (P) thì đường thẳng a đi qua A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P) (Hình 124).

$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ A \in a \text{ và } a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$$



Hình 125

Định lí 3 :

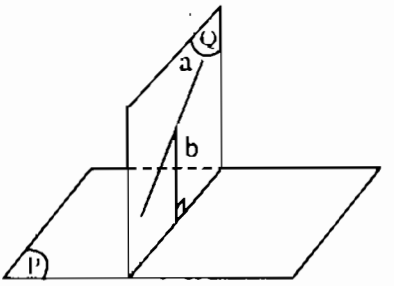
Hai mặt phẳng (P), (Q) cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba (R) thì giao tuyến của hai mặt phẳng đó cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba (Hình 125).

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \text{ và } (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$$

Định lí 4 :

Qua một đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) có một và chỉ một mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P) (Hình 126).

$a \not\perp (P) \Rightarrow$ Có (Q) $\supset a$ và $(Q) \perp (P)$



Hình 126

B. VÍ DỤ AP DỤNG

Dạng 1. CHỨNG MINH HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Phương pháp

Cách 1 : Chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Cách 2 : Chứng minh góc giữa hai mặt phẳng có số đo bằng 90° hay góc phẳng của nhị diện do hai mặt phẳng đó tạo nên bằng 90°.

Ví dụ 1 : Cho tứ diện ABCD có AB $\perp$ mp(BCD). Trong tam giác BCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O. Trong mặt phẳng ADC vẽ DK $\perp$ AC tại K.

a) Chứng minh mp(ADC) $\perp$ mp(ABE) và mp(ADC) $\perp$ mp(DFK).

b) Gọi H là trực tâm của tam giác ACD. Chứng minh OH vuông góc với mặt phẳng (ACD).

Hướng dẫn giải

a) Ta có :

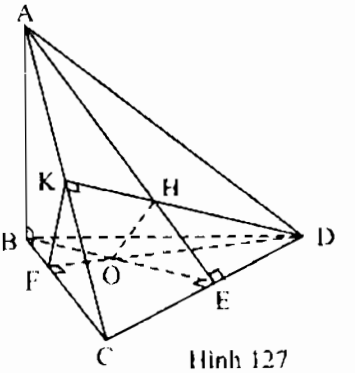
$$\begin{cases} BE \perp CD \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp mp(ABE)$$

Suy ra : $mp(ACD) \perp mp(ABE)$

$$\begin{cases} DF \perp BC \\ DF \perp AB \end{cases} \Rightarrow DF \perp mp(ABC)$$

Suy ra : $DF \perp AC$

Ta cũng có : $DK \perp AC$



Hình 127

Suy ra : $AC \perp mp(DFK) \Rightarrow mp(ACD) \perp mp(DFK)$ (Hình 127).

b) Do $CD \perp mp(ABE)$ nên $CD \perp AE$. Ta có H là trực tâm của tam giác ACD và O là trực tâm của tam giác BCD. Hai mặt phẳng (ABE) và (DFK) có giao tuyến là đường thẳng OK. Mặt khác, ta lại có $mp(ABE) \perp mp(ACD)$ và $mp(DFK) \perp mp(ACD)$ nên $OH \perp mp(ACD)$.

Ví dụ 2 : Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm I có cạnh bằng a và đường chéo CB = a. Cạnh $SD = a\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Chứng minh hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) vuông góc với nhau.

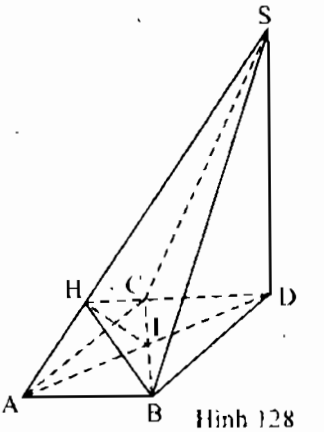
Hướng dẫn giải

Vì ABCD là hình thoi nên ta có :

$$\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SAD) \Rightarrow BC \perp SA.$$

Trong mặt phẳng (SAD) vì $IH \perp SA$ tại H, ta suy ra $SA \perp mp(BCH)$. Do đó : $BH \perp SA$ và $CH \perp SA$.

Vậy $\widehat{BHC}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC). (Hình 128).



Hình 128

Hai tam giác vuông AHI và ADS có góc nhọn A chung nên chúng là hai tam giác đồng dạng. Do đó :

$$\frac{IH}{AI} = \frac{AD}{SA} \Rightarrow IH = \frac{AI.AD}{SA} \qquad (1)$$

Vì CB = a nên ABC là tam giác đều, do đó :

$$AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \; ; \; AD = 2AI = a\sqrt{3}$$

$$SA = \sqrt{AD^2 + SD^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(a\sqrt{6}\right)^2} = 3a$$

Thay các giá trị của AI, AD, SA vào (1) ta được :

$$IH = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3}}{3a} = \frac{a}{2} = \frac{BC}{2}$$

Tam giác BHC có trung tuyến IH ứng với BC bằng $\frac{BC}{2}$ nên đó là tam giác vuông tại H hay $\widehat{BHC} = 90^o$. Vậy hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) vuông góc với nhau.

Ví dụ 3 : Cho hình chóp tam giác đều S.ABC đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M và N lần lượt là các trung điểm của các cạnh SB và SC. Tính theo a diện tích tam giác AMN, biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

(Trích đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng, Khối A, năm 2002)

Hướng dẫn giải

Gọi K là trung điểm của BC và $I = SK \cap MN$

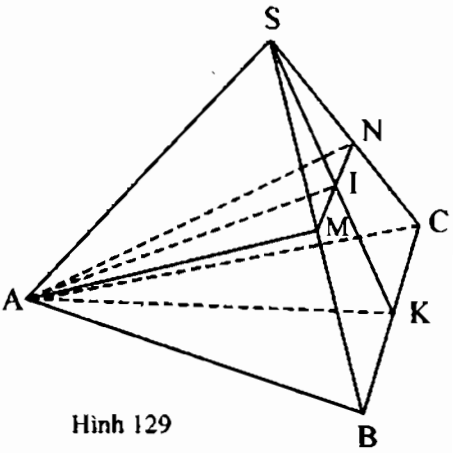
Vì $MN // BC$ và $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$

nên I là trung điểm của MN và SK

Vì hình chóp S.ABC là hình chóp tam giác đều nên $\Delta SAB = \Delta SAC$

$\Rightarrow$ Hai trung tuyến tương ứng $AM = AN$

$\Rightarrow \Delta AMN$ cân ở $A \Rightarrow AI \perp MN$



Hình 129

Vì $mp(AMN) \perp mp(SBC)$, mà $AI(AMN)$ và AI vuông góc với giao tuyến MN của 2 mặt phẳng vuông góc (AMN), (SBC) nên $AI \perp (SBC) \Rightarrow AI \perp SK$

Do đó ΔASK cân tại A vì có AI là đường cao và là trung tuyến

$$\Rightarrow AS = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Tam giác vuông KSB cho :

$$SK^2 = SB^2 - BK^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow SK = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Tam giác vuông SAI cho :

$$AI^2 = SA^2 - SI^2 = \frac{3a^2}{4} - \left(\frac{SK}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} - \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{10a^2}{16} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

Vậy $S_{AMN} = \frac{1}{2}MN.AI = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{10}}{4} = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$ (đvdt)

Dạng 2. XÁC ĐỊNH MẶT PHẲNG (P) CHỨA ĐƯỜNG THẲNG a VÀ VUÔNG GÓC VỚI MỘT MẶT PHẲNG (Q) ĐÃ CHO, BIẾT RẰNG a KHÔNG VUÔNG GÓC VỚI (Q)

Phương pháp

Từ điểm $M \in a$, dựng đường thẳng $b \perp (Q)$, ta có :

$$P = mp(a, b).$$

Ví dụ : Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD).

a) Hãy xác định mặt phẳng (α). Mặt phẳng (α) cắt hình chóp SABCD theo thiết diện là hình gì ?

b) Tính diện tích thiết diện.

Hướng dẫn giải

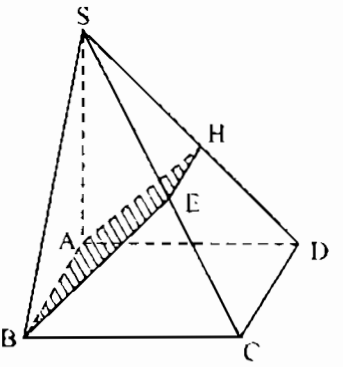
a) Trong mp(SAD) dựng $AH \perp SD$ tại H. ta có :

$$\left.\begin{array}{l} DC \perp AD \\ DC \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow DC \perp mp(SAD)$$

Vậy $DC \perp AH$ vì $AH \subset mp(SAD)$

$$\left.\begin{array}{l} AH \perp DC \\ AH \perp SD \end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp mp(SDC)$$

Mặt phẳng (α) là mặt phẳng chứa AH, trong đó AH vuông góc mp(SDC) Vậy α là mặt phẳng (ABH). (Hình 130)



Hình 130

Ta có AB // CD nên CD // (α) và H là điểm chung của (α) và (SCD) nên giao tuyến của (α) với (SCD) là đường thẳng qua H và song song với CD, cắt SC tại E. Hai mặt phẳng (α) và (SBC) có hai điểm chung là B và E nên giao tuyến của chúng là đường thẳng BE. Ta được thiết diện là tứ giác AHEB có HE // AB và vì AB $\perp$ mp(SAD) nên AHEB là hình thang vuông tại A và B.

b) Gọi S là diện tích của thiết diện.

Ta có : $S = \frac{1}{2}(AB + HE).AH$

Tam giác SAD vuông tại A nên ta có :

$$SD^2 = SA^2 + AD^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2$$

Vậy : SD = 2a :

$$AH = \frac{SA.AD}{SD} = \frac{a\sqrt{3}.a}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$SA^2 = SH.SD \Rightarrow SH = \frac{SA^2}{SD} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2}$$

Trong tam giác SCD vì EH // CD nên : $\frac{HE}{CD} = \frac{SH}{SD}$.

Do đó : $HE = \frac{CD.SH}{SD} = \frac{a.\frac{3a}{2}}{2a} = \frac{3a}{4} \Rightarrow S = \frac{1}{2}\left(a + \frac{3a}{4}\right).\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{16}$.

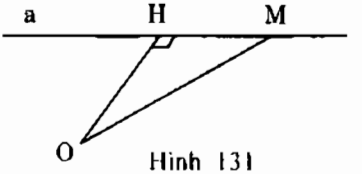
§ 11. KHOẢNG CÁCH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khoảng cách từ một điểm O tới đường thẳng a

Trong không gian kẻ OH ⊥ a với H ∈ a. Độ dài đoạn thẳng OH được gọi là khoảng cách từ điểm O tới đường thăng a và được kí hiệu là d(O, a)

d(O, a) = OH ≤ OM với mọi M ∈ a (Hình 131).

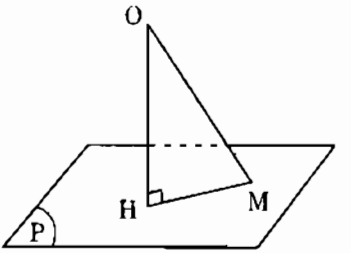


Hình 131

2. Khoảng cách từ một điểm O tới mặt phăng (P)

Trong không gian kẻ OH ⊥ (P) với H ∈ (P). Độ dài đoạn OH được gọi là khoảng cách từ điểm O tới mặt phăng (P) và kí hiệu d(O, (P))

d(O, (P)) = OH ≤ OM với mọi M ∈ (P) (Hình 132).

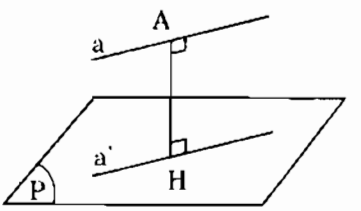


Hình 132

3. Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song

Cho đường thăng a // mp(P). Khoảng cách từ một điểm A bất kì của a đến mặt phăng (P) có giá trị không đổi. Giá trị đó gọi là khoảng cách từ đường thăng a tới mặt phăng (P) và được kí hiệu là d(a, (P)).

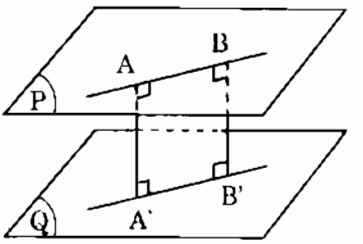
d(a, (P)) = d(A, (P)) với A ∈ a (Hình 133).



Hình 133

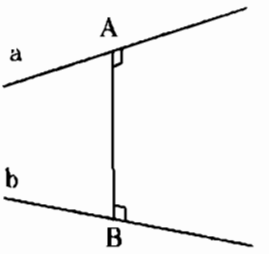
4. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Cho hai mặt phăng song song (P) và (Q. Khoảng cách từ một điểm của (P) tới (Q) không phụ thuộc vào vị trí điểm đó trên (P) được gọi là khoảng cách giữa hai mặt phăng song song (P) và (Q). (Hình 134).



Hình 134

5. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau



Hình 135

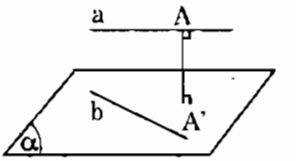
Định nghĩa :

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó. (Hình 135).

$A \in a,\ B \in b$
$AB \perp a,\ AB \perp b$ $\Rightarrow$ AB là đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng chéo nhau a và b.

Tính chất :

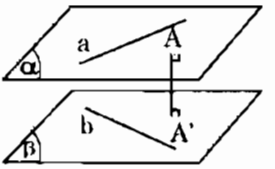
a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại. (Hình 136a)



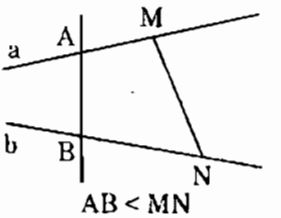
$a \,//\, \alpha$
$b \subset \alpha$ Hình 136a

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó. (Hình 136b)

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là khoảng cách bé nhất so với các khoảng cách giữa hai điểm bất kì lần lượt thuộc hai đường thẳng ấy. (Hình 136c).



$a \subset \alpha,\ b \subset \beta$
$\alpha \,//\, \beta$ Hình 136b



$AB < MN$
Hình 136c

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Dạng 1. XÁC ĐỊNH ĐOẠN VUÔNG GÓC CHUNG CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Phương pháp

Ngoại trừ trường hợp đoạn vuông góc chung có sẵn, ta dựng đoạn vuông góc chung theo các cách sau đây :

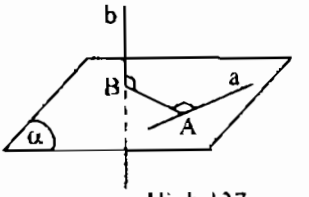
Cách 1 :

Giả sử a, b là hai đường thẳng chéo nhau và a ⊥ b.

Dựng mặt phẳng (α) chứa a vuông góc với b tại B.

– Dựng BA ⊥ a tại A (Hình 137).

Đoạn AB là đoạn vuông góc chung của a và b.



Hình 137

Cách 2 :

Cho a và b chéo nhau.

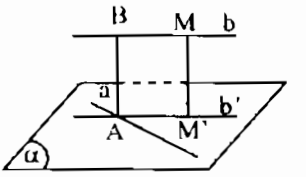
– Dựng (α) chứa a, song song với b.

– Chọn M trên b dựng MM' ⊥ (α) tại M'.

– Từ M' dựng b' // b cắt a tại A.

– Từ A dựng AB // M'M cắt b tại B. (H. 138)

Đoạn AB là đoạn vuông góc chung của a và b.



Hình 138

Cách 3 :

Cho a và b chéo nhau.

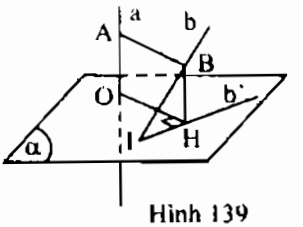
Dựng mặt phẳng (α) ⊥ a tại O, (α) cắt b tại I.

Dựng hình chiếu vuông góc b' của b trên (α).

– Dựng trong (α) đường OH ⊥ b' (Hình 139)

– Từ H, dựng đường thẳng song song với a cắt b tại điểm B.

Từ B dựng đường thẳng song song với OH, cắt a tại A.



Hình 139

Đoạn AB là đoạn vuông góc chung của a và b (Hình 139).

Ví dụ 1 : Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Cạnh SA = h và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của :

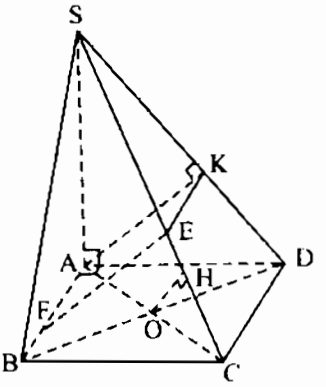
a) SB và CD ; b) SC và BD ; c) SC và AB.

Hướng dẫn giải

a) Ta có :

$$\left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp mp(SAB) \text{ nên } BC \perp SB.$$

Mặt khác BC ⊥ CD. Vậy BC là đoạn vuông góc chung của SB và CD và BC = a (Hình 140)



Hình 140

b) Ta có :

$$\left.\begin{matrix} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp mp(SAC) \text{ tại O.}$$

Trong mp(SAC) từ O hạ OH ⊥ SC tại H ta có :

$$\begin{cases} OH \perp SC \\ OH \perp BD \text{ (do } BD \perp mp(SAC)) \end{cases}$$

Vậy OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Ta có :

$$\frac{OH}{OC} = \frac{SA}{SC} = \sin \widehat{ACS} \Rightarrow OH = \frac{OC.SA}{SC} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + 2a^2}}$$

c) Ta có : $\left.\begin{matrix} AB \perp SA \\ AB \perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp mp(SAD)$

Vì CD ⊥ mp(SAC) nên SD là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (SAD).

Trong mp(SAD) hạ AK ⊥ SD tại K. Trong mp(SCD) vẽ KE // CD // AB với E ∈ SC.

Trong mp(KE, AB) vẽ EF // AK với F ∈ AB. Ta có AB và CD cùng vuông góc với mp(SAD) nên AB ⊥ AK và CD ⊥ AK.

Ta có : $\left.\begin{matrix} AK \perp SD \\ AK \perp CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow AK \perp mp(SCD) \Rightarrow AK \perp SC.$

Tóm lại $AK \perp AB$ và $AK \perp SC$. Vì $EF // AK$ nên $EF \perp AB$ và $EF \perp SC$.

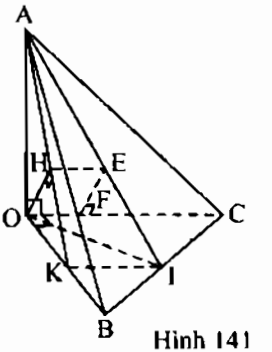
Vậy EF là đoạn vuông góc chung của SC và AB.

Ta có : $EF = AK = \dfrac{AS.AD}{SD} = \dfrac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}$

Ví dụ 2 : Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc và OA = OB = OC = a. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng.

a) OA và BC ; b) AI và OC.

Hướng dẫn giải



Hình 141

a) Ta có : $\left.\begin{matrix} OI \perp OA \\ OI \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow OI$ là đoạn vuông góc chung của OA và BC.

Ta có : $OI = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (Hình 141).

b) Do $\left.\begin{matrix} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{matrix}\right\} \Rightarrow OC \perp mp(OAB)$ tại O.

Từ I vẽ $IK // OC$ thì IK vuông góc với mặt phẳng (OAB) tại trung điểm K của đoạn OB. Ta có AK là hình chiếu vuông góc của AI trên mặt phẳng (OAB). Trong mặt phẳng (OAB) vẽ $OH \perp AK$. Dựng $HE // OC$ với $E \in AI$ và dựng $EF // OH$ với $F \in OC$. Khi đó EF là đoạn vuông góc chung của AI và OC và EF = OH.

Trong tam giác OAK ta có :

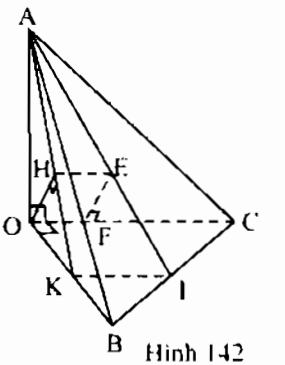
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{5}{a^2}$$

Vậy : $OH^2 = \dfrac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$ và $EF = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Chú thích :

Ta có thể dựng đường vuông góc chung của AI và OC bằng cách khác như sau :

Gọi (α) là mặt phẳng chứa AI và (α) // OC, mp(α) cắt mặt phẳng (OBC) theo giao tuyến KI // OC với K là trung điểm của OB. Ta có (α) = mp(AKI) và AK = mp(OAB) ∩ (α). Chiếu vuông góc đường thẳng OC xuống (α) bằng cách vẽ OH ⊥ AK và vẽ đường thẳng HE // OC với E ∈ AI. Từ E ta vẽ EF // OH với F ∈ OC ta có EF là đường vuông góc chung của AI và OC. (Hình 142).



Hình 142

Dạng 2. TÍNH KHOẢNG CÁCH GIỮA :

- ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG VỚI ĐƯỜNG THẲNG ĐÓ
- HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Phương pháp

– Khoảng cách từ một đường thẳng đến một mặt phẳng song song với nó là khoảng cách từ một điểm tuỳ ý trên đường thẳng đến mặt phẳng đó.

– Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm tuỳ ý trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

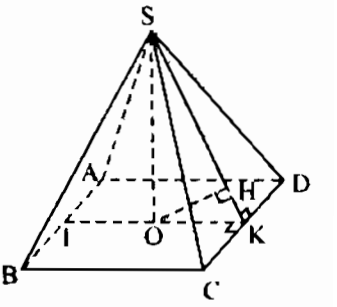
Ví dụ 1 : Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O có cạnh AB a. Đường cao SO ⊥ mp(ABCD) và SO = a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và AB.

Hướng dẫn giải

Vì AB // CD nên AB song song mp(SCD). Do đó khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là SC và AB bằng khoảng cách giữa AB và mp(SCD) // AB. (Hình 143)

Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB và CD thì O là trung điểm của IK và ta có IK ⊥ CD. Do đó :

d[AB, (SCD)] = d[I, (SCD)] = 2d[O, (SCD)]



Hình 143

$$\text{Vì } \left.\begin{matrix} CD \perp SO \\ CD \perp OK \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp mp(SOK)$$

$$\Rightarrow mp(SCD) \perp mp(SOK) = SK.$$

Trong tam giác SOK ta có OH $\perp$ SK nên OH $\perp$ mp(SCD).

Do đó : OH = d[O, (SCD)]

$$\text{Ta có : } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vậy : } d(SC, AB) = d[AB, (SCD)] = 2d[O, (SCD)] = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Ví dụ 2 : Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính AD = 2a và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD) với SA = $a\sqrt{6}$.

a) Tính các khoảng cách từ A và B đến mp(SCD).

b) Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mp(SBC).

Hướng dẫn giải

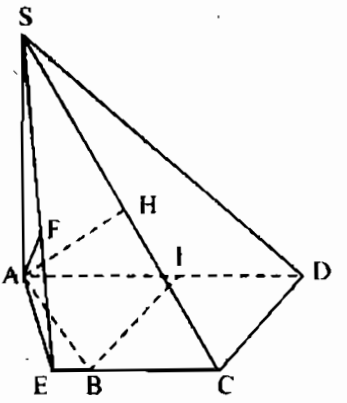
a) Vì ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính AD = 2a nên ta có :

AD // BC,

AB = BC = CD = a ;

AC $\perp$ CD,

AB $\perp$ BD ; AC = BD = $a\sqrt{3}$.



Hình 144

Ta có :

$$\left.\begin{matrix} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp mp(SAC)$$

Dựng AH $\perp$ SC tại H, ta có AH $\perp$ CD nên AH $\perp$ mp(SCD). Vậy AH = d[A, (SCD)]. (Hình 144)

Xét tam giác vuông SAC, vuông tại A và có AH là đường cao, do đó :

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{\left(a\sqrt{6}\right)^2} + \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{2a^2}$$

Vậy : $AH^2 = 2a^2 \Rightarrow AH = a\sqrt{2}$

Gọi I là trung điểm của AD ta có BI // CD nên BI song song mp(SCD). Từ đó suy ra : d[B, (SCD)] = d[I, (SCD)].

Mặt khác AI cắt mp(SCD) tại D nên :

$$\frac{d[I, (SCD)]}{d[A, (SCD)]} = \frac{DI}{DA} = \frac{1}{2} \Rightarrow d[I, (SCD)] = \frac{1}{2} d[A, (SCD)] = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

(vì d[A, (SCD)] = AH = $a\sqrt{2}$). Do đó : $d[B, (SCD)] = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) AD // BC nên AD // mp(SBC). Do đó :

$$d[AD, (SBC)] = d[A, (SBC)].$$

Dựng AE ⊥ BC tại E ta có :

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp AE \\ BC \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp mp(SAE)$$

Dựng AF ⊥ SE tại F ta có :

$$\left.\begin{array}{l} AF \perp SE \\ AF \perp BC \text{ (vì } BC \perp (SAE)) \end{array}\right\} \Rightarrow AF \perp mp(SBC)$$

Vậy : AF = d[A, (SBC)] = d[AD, (SBC)]

Xét tam giác vuông AEB ta có :

$$AE = AB \sin\widehat{ABE} = a\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Xét tam giác vuông SAE ta có :

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{\left(a\sqrt{6}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{9}{6a^2}$$

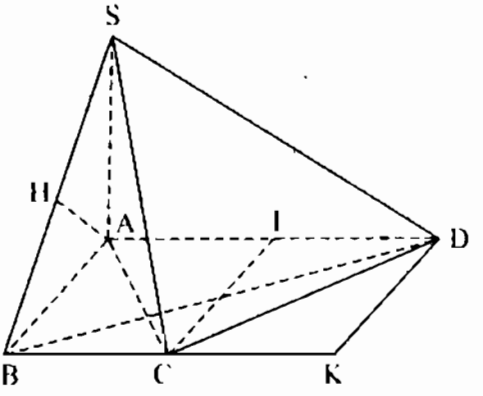
Do đó : $AF^2 = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow AF = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Vậy : $d[AD, (SBC)] = AF = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Ví dụ 3 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0$, BA = BC = a, AD = 2a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

(Trích đề thi tuyển sinh Đại học Khối D, năm 2007)

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của AD. Ta có AI // BC và AI = BC = a ⇒ Tứ giác ABCI là hình vuông ⇒ CI = AI = ID = a ⇒ ΔACD vuông ở C hay CD ⊥ AC



Hình 145

Vì SA ⊥ mp(ABCD) nên SA ⊥ CD ⇒ CD ⊥ mp(SAC), mà SC ⊂ (SAC) nên CD ⊥ SC, hay ΔSCD vuông ở C. Tam giác vuông SAB cho :

$$SB^2 = SA^2 + AB^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2 = 3a^2 \Rightarrow SB = a\sqrt{3}$$

và $SH = \dfrac{SA^2}{SB} = \dfrac{2a^2}{a\sqrt{3}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

Do đó : $\dfrac{SH}{SB} = \dfrac{\sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}$

Gọi $d_1 ; d_2$ lần lượt là khoảng cách từ B và H đến mp(SCD) thì

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{SB}{SH} = \frac{3}{2} \Rightarrow d_2 = \frac{2}{3}d_1$$

Ta có $V_{S.BCD} = \dfrac{1}{3}d_1.S_{SCD} \Rightarrow d_1 = \dfrac{3V_{S.BCD}}{S_{SCD}} = \dfrac{SA.S_{BCD}}{S_{SCD}}$

mà $S_{BCD} = \dfrac{1}{2}DK.BC = \dfrac{1}{2}AB.BC = \dfrac{1}{2}a^2$

và $S_{SCD} = \dfrac{1}{2}SC.CD = \dfrac{1}{2}.2a.a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$ (Vì ΔSAC vuông cân tại A nên $SC = SA\sqrt{2} = 2a$ và ΔICD vuông cân tại I nên $CD = ID\sqrt{2} = a\sqrt{2}$)

Suy ra : $d_1 = \dfrac{a}{2}$

Vậy $d\left(H ; (SCD)\right) = d_2 = \dfrac{2}{3}d_1 = \dfrac{a}{3}$.

Ví dụ 4 : Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA. M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

(Trích đề thi tuyển sinh Đại học Khối B, năm 2007)

Hướng dẫn giải

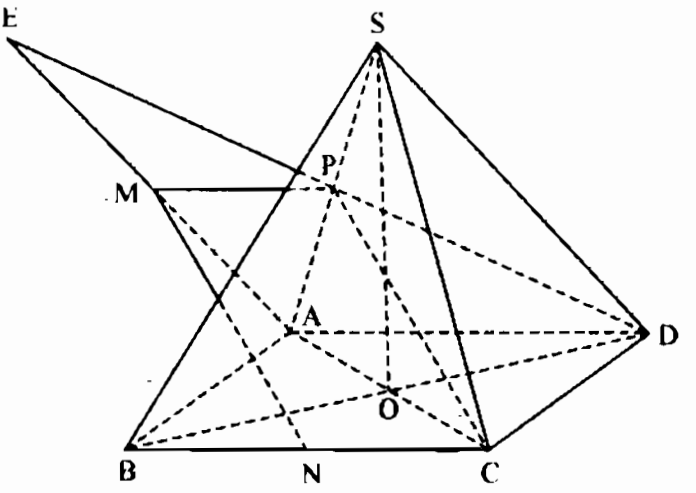
• Gọi P là trung điểm của SA. Ta có $MP // AD$ và $MP = \frac{1}{2}AD$ nên $MP // CN$ và $MP = CN \Rightarrow$ Tứ giác MNCP là hình bình hành $\Rightarrow MN // mp(SAC)$

Vì S.ABCD là hình chóp tứ giác đều nên $BD \perp AC$ và $BD \perp SO\ (O = AC \cap BD) \rightarrow BD \perp (SAC)$. Do đó : $BD \perp MN$

• Vì $MN // (SAC)$ và $AC \subset (SAC)$ nên :

$$d(MN, AC) = d(MN ; (SAC)) = d(N ; (SAC)) = \frac{1}{2}d(B ; (SAC))$$

$$= \frac{1}{2}BO = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$



Hình 146

Ví dụ 5. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Tính theo a thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa 2 đường thẳng AM, BC.

(Trích đề thi tuyển sinh Đại học Khối D, năm 2008)

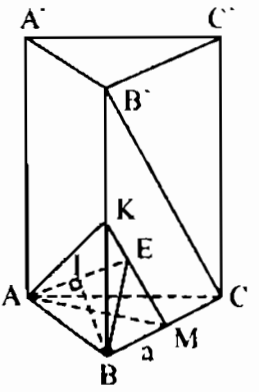
Hướng dẫn giải

• Vì AB = BC = a nên ΔABC vuông cân ở B

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{2}a.a = \frac{a^2}{2}$

Do đó : $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC}$

$= a\sqrt{2}.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ (đvtt)



Hình 147

• Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BB' thì

$BB' // KM \Rightarrow BB' // mp(AMK)$

$\Rightarrow d(B'C, AM) = d(B'C, (AMK))$

$= d(C ; (AMK)) = d(B ; (AMK))$

• Gọi E là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng KM và I là hình chiếu vuông góc của B lên AE.

Ta có $AB \perp BC$ và $AB \perp BB'$ nên $AB \perp mp(BKM) \Rightarrow KM \perp AB$ và do $KM \perp BE$ nên $KM \perp mp(ABE) \Rightarrow KM \perp BI$ Suy ra $BI \perp mp(AMK)$

Vậy $d(B'C, AM) = d(B ; (AMK)) = BI$

Tam giác vuông BAE cho ta : $\frac{1}{BI^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BE^2}$

và tam giác vuông BKM cho ta : $\frac{1}{BE^2} = \frac{1}{BK^2} + \frac{1}{BM^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{BI^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BK^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\frac{a^2}{2}} + \frac{1}{\frac{a^2}{4}} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow BI = \frac{a}{\sqrt{7}}$

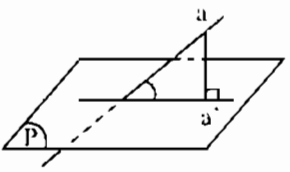
Tức là $d(AM, B'C) = \frac{a}{\sqrt{7}}$

§ 12. GÓC

KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định nghĩa : Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) là góc giữa hình chiếu vuông góc a' của a trên (P). (Hình 148)

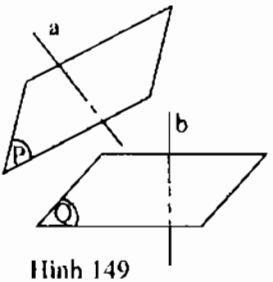


Hình 148

2. Góc giữa hai mặt phẳng

Định nghĩa : Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là góc giữa hai đường thẳng a và b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

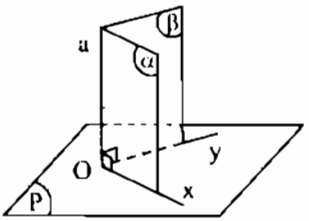
$a \perp (P), b \perp (Q) \Rightarrow \widehat{((P),(Q))} = \widehat{(a,b)}$ (Hình 149).



Hình 149

3. Nhị diện

Định nghĩa : Hình hợp bởi hai nửa mặt phẳng (α) và (β) có chung bờ a gọi là *nhị diện*. Mỗi nửa mặt phẳng (α) và (β) gọi là một *mặt* của nhị diện. Đường thẳng a gọi là *cạnh* của nhị diện. Kí hiệu nhị diện $[\alpha, a, \beta]$ (Hình 150).



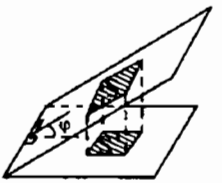
Hình 150

Cắt nhị diện $[\alpha, a, \beta]$ bởi một mặt phẳng (P) vuông góc với cạnh a tại điểm O ta được các nửa đường thẳng Ox và Oy. Khi đó góc $\widehat{xOy}$ được gọi là góc phẳng của nhị diện $[\alpha, a, \beta]$. Số đo của góc phẳng nhị diện được gọi là số đo của nhị diện.

4. Diện tích hình chiếu của một đa giác

Gọi S là diện tích của một đa giác phẳng với S' là diện tích của đa giác hình chiếu (vuông góc) và φ là góc giữa mặt phẳng của đa giác và mặt phẳng chiếu, ta có :

$S' = S \cos\varphi$ (Hình 151)

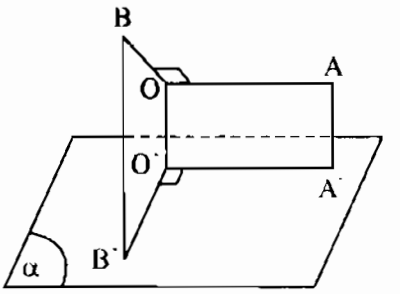


Hình 151

5. Hình chiếu của góc vuông

Định lí : Hình chiếu của một góc vuông lên một mặt phẳng (α) là một góc vuông khi và chỉ khi góc vuông đem chiếu có ít nhất một cạnh song song hoặc nằm trong (α). (Hình 152)

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{AOB} = 90^0\\ OA \,//\, (\alpha)\\ (\text{Hoặc } OA \subset (\alpha))\end{array}\right\} \Leftrightarrow \widehat{A'O'B'} = 90^0$$



Hình 152

C. LUYỆN TẬP

3.1 Cho tam giác ABC vuông tại C nằm trong mặt phẳng (α). Trên đường thẳng d vuông góc với (α) tại A ta lấy một điểm S. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC.

a) Chứng minh các mặt của tứ diện SABC đều là tam giác vuông.

b) Tìm tập hợp các điểm D và E khi S di động trên d.

c) Chứng minh rằng AE vuông góc với mặt phẳng (SBC). DE vuông góc với SB và AE.

3.2 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh bằng a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SO = \frac{a}{2}$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của các đoạn AD, BC. Chứng minh rằng :

a) Mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng SBD.

b) Đường thẳng BC vuông góc với đường thẳng SI.

c) Mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

3.3 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M, N là hai điểm lần lượt trên hai cạnh BC, DC sao cho $BM = \frac{a}{2}$, $DN = \frac{3a}{4}$. Chứng minh mặt phẳng (SAM) vuông góc với mặt phẳng (SMN).

3.4 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính khoảng cách giữa :

a) SC và BD. b) AC và SD.

3.5 Cho hình thoi ABCD chỉ có đỉnh A thuộc mặt phẳng (α) còn các đỉnh khác không thuộc (α) và nằm về một phía đối với (α). Các đường chéo BD = a, AC = $a\sqrt{2}$. Chiếu vuông góc hình thoi xuống mặt phẳng (α) ta được hình vuông AB'C'D'.

a) Chứng minh DB // D'B' và tính D'B'.

b) Tính diện tích của ABCD và của AB'C'D'. Từ đó suy ra góc của hai mặt phẳng (ABCD) và (α).

c) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của CB, CD với mặt phẳng (α). Tính diện tích của các tứ giác EFDB và EFD'B'.

3.6 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh a và cạnh SA vuông góc với đáy (ABCD). Giả sử SA = h.

a) Tìm hệ thức giữa a và h để góc của hai đường thẳng SC và AB bằng 60^0.

b) Cho $h = a\sqrt{2}$ hãy tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB.

c) Chứng minh góc phẳng của nhị diện cạnh SC là góc tù.

3.7 Cho tứ diện ABCD cạnh a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

a) Chứng minh AO $\perp$ mp(BCD) và tính AO.

b) Gọi I là trung điểm của AO. Tính độ dài các đoạn IB, IC, ID và chứng minh chúng vuông góc với nhau từng đôi một.

3.8 Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' có cạnh bằng a.

a) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AC và DC'.

b) Chứng minh A'C vuông góc với mặt phẳng (BDC').

c) Gọi G là trọng tâm của tam giác A'C'D'. Mặt phẳng (GAC) cắt hình lập phương theo thiết diện là hình gì ? Tính diện tích hình đó.

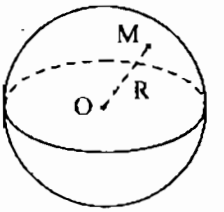
Chương 4.
MẶT CẦU VÀ MẶT TRÒN XOAY

§ 13. MẶT CẦU

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa mặt cầu

Cho một điểm O cố định và một số thực dương R. Tập hợp tất cả những điểm M trong không gian cách điểm O một khoảng bằng R được gọi là *mặt cầu tâm O bán kính R*. Kí hiệu là S(O, R) hay viết tắt là (S) (Hình 153)



Hình 153

$$S(O, R) = \{M / OM = R\}$$

- Tập hợp các điểm M trong không gian thoả mãn điều kiện $OM < R$ gọi là *khối cầu tâm O bán kính R hoặc hình cầu tâm O bán kính R*

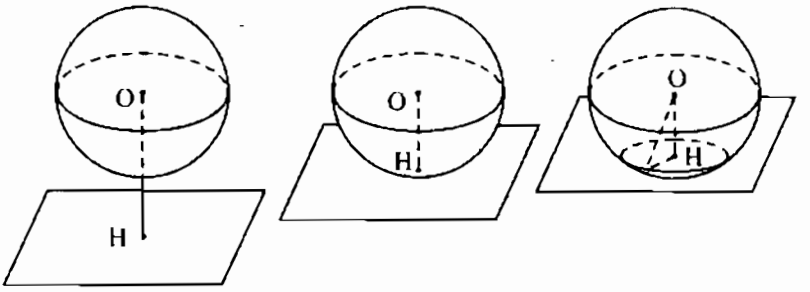
2. Vị trí tương đối của một mặt cầu và một mặt phẳng

Cho mặt cầu S(O, R) và mặt phẳng (P) bất kì. Gọi $d = OH$ là khoảng cách từ tâm O tới mặt phẳng (P). (Hình 154)

a) Nếu $d > R$ ta có $(S) \cap (P) = \varnothing$ (Hình 154a)

b) Nếu $d = R$ ta có $(S) \cap (P) = H$. Lúc đó (P) gọi là *tiếp diện* của mặt cầu. Điểm H gọi là *tiếp điểm* của mặt cầu và mặt phẳng. (Hình 154b)

c) Nếu $d < R$ mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn C(H, r) với $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. (Hình 154c). Đặt biệt khi $d = 0$, mặt phẳng cắt mặt cầu theo giao tuyến là một đường tròn lớn.



a) $d > R$ b) $d = R$ c) $d < R$

Hình 154

3. Vị trí tương đối của mặt cầu và một đường thẳng

Cho mặt cầu S(O, R) và đường thẳng Δ bất kì.

- Nếu Δ đi qua tâm O thì Δ cắt mặt cầu tại hai điểm A, B với AB là đường kính của mặt cầu.

– Nếu Δ không đi qua O thì mặt phẳng (O, Δ) cắt mặt cầu theo một đường tròn lớn. Khi đó giao của Δ và (S) chính là giao của Δ và đường tròn lớn (C). Nếu gọi d = OH là khoảng cách từ O tới Δ ta có :

* Nếu d < R : Δ cắt (C) tại hai điểm.

* Nếu d = R : Δ tiếp xúc với (C) tại H, ta nói rằng Δ *tiếp xúc* với mặt cầu (S) tại điểm H. Điểm H gọi là *tiếp điểm* và đường thẳng Δ được gọi là *tiếp tuyến* của mặt cầu (S).

* Nếu d > R ta có $\Delta \cap (S) = \varnothing$: Δ không cắt mặt cầu.

4. Các tính chất của tiếp tuyến

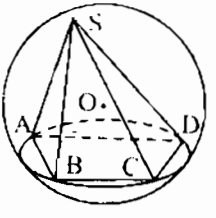
Định lí 1 : Qua điểm A nằm trên mặt cầu S(O, R) có vô số tiếp tuyến của mặt cầu (S). Tất cả các tiếp tuyến này đều nằm trên tiếp diện của (S) tại điểm A.

Định lí 2 : Qua điểm A nằm ngoài mặt cầu S(O, R) có vô số tiếp tuyến với mặt cầu (S). Độ dài các đoạn thẳng kẻ từ A tới các tiếp điểm đều bằng nhau.

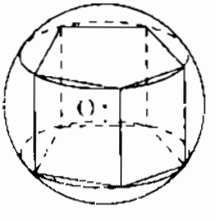
5. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và lăng trụ

– Một mặt cầu gọi là ngoại tiếp một hình chóp nếu nó đi qua mọi đỉnh của hình chóp đó. (Hình 155)

– Một mặt cầu gọi là ngoại tiếp một hình lăng trụ nếu nó đi qua mọi đỉnh của hình lăng trụ đó. (Hình 156)



Hình 155



Hình 156

Nhận xét :

a) Hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp có đáy là một đa giác có đường tròn ngoại tiếp.

b) Hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp là hình lăng trụ đứng và có đáy là đa giác có đường tròn ngoại tiếp. Hình hộp có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi nó là hình hộp chữ nhật.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Dạng 1. XÁC ĐỊNH MẶT CẦU VÀ CHỨNG MINH MỘT ĐIỂM M LUÔN LUÔN THUỘC MẶT CẦU ĐÓ

Phương pháp

Cách 1 :

Chứng minh OM = R với O là một điểm cố định và R là độ dài không đổi.

Cách 2 :

Chứng minh $\widehat{AMB} = 90^0$ với A, B là hai điểm cố định.

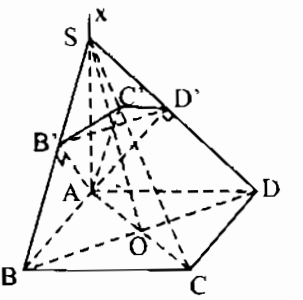
Ví dụ 1 : Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD tâm O có cạnh bằng a. Trên đường thẳng Ax vuông góc với (P) ta lấy một điểm S tuỳ ý và dựng mặt phẳng (Q) đi qua A và vuông góc với SC. Mặt phẳng (Q) cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Chứng minh khi S di động trên Ax bảy điểm A, B, C, D, B', C', D' luôn luôn thuộc mặt cầu cố định. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$\left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$$

Ta lại có AB' ⊥ SC vì AB' ⊂ (Q) mà (Q) ⊥ SC. Do đó AB' ⊥ (SBC) ⇒ AB' ⊥ B'C. (Hình 157)



Hình 157

Tương tự ta chứng minh được AD' ⊥ D'C. Vậy ta có :

$$\widehat{ABC} = \widehat{AB'C} = \widehat{AC'C} = \widehat{ADC} = \widehat{AD'C} = 90^0.$$

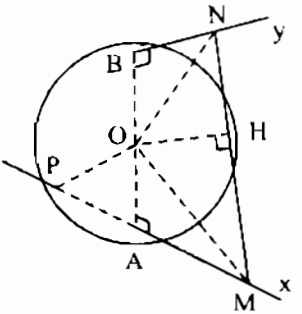
Vậy bảy điểm A, B, C, D, B', C', D' cùng nằm trên mặt cầu đường kính tâm O bán kính :

$$R = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Ví dụ 2 : Cho hai tia Ax, By chéo nhau nhận AB làm đoạn vuông góc chung. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên Ax, By sao cho MN = AM + BN. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

Hướng dẫn giải

Gọi O là trung điểm của AB, H là hình chiếu vuông góc của O trên MN. Kéo dài MA về phía A một đoạn AP = BN. Ta có : MN = AM + BN = AM + AP = MP (Hình 158)



Hình 158

Hai tam giác vuông OBN và OAP bằng nhau nên ta có ON = OP. Vậy $\Delta OMN = \Delta OMP$ (c.c.c). Do đó các đường cao tương ứng bằng nhau là OH = OA. Vì $OH = OA = \frac{AB}{2}$ mà $OH \perp MN$, nên đường thẳng MN tiếp xúc với mặt cầu tâm O bán kính OA. Mặt cầu này nhận AB làm đường kính và Ax, By làm tiếp tuyến.

Dạng 2. MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP

Phương pháp

– Chứng minh mặt cầu chứa tất cả các đỉnh của hình chóp. Tâm của mặt cầu cách đều tất cả các đỉnh của hình chóp một đoạn bằng R.

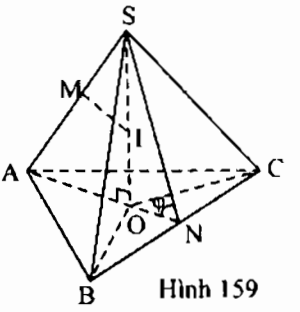
– Điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của hình chóp có đường tròn ngoại tiếp.

Ví dụ 1 : Cho hình chóp tam giác SABCD có cạnh đáy bằng a, một bên hợp với mặt phẳng đáy một góc bằng φ. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Hướng dẫn giải

Dựng $SO \perp mp(ABC)$.

Vì SA = SB = SC nên OA = OB = OC và ta có SO là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Trong mặt phẳng (SAO) đường trung trực của SA cắt SO tại I, ta có : IS = IA. Mặt khác, I nằm trên trục đường tròn (ABC) nên IA = IB = IC. Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tam giác đều SABC. (Hình 159). Gọi M là trung điểm của SA, ta có tứ giác AMIO nội tiếp do đó :



Hình 159

$$SI.SO = SM.SA \Rightarrow R = SI = \frac{SM.SA}{SO} = \frac{2SM.SA}{2SO} = \frac{SA^2}{2SO}$$

Gọi $\varphi = \widehat{SNA} \Rightarrow \tan\varphi = \frac{SO}{ON}$ hay $SO = ON\tan\varphi = \frac{a\sqrt{3}}{6}\tan\varphi$

Xét tam giác vuông SAO ta có :

$$SA^2 = SO^2 + OA^2 = \frac{3a^2}{36}\tan^2\varphi + \frac{3a^2}{9} = \frac{a^2}{12}\left(4 + \tan^2\varphi\right)$$

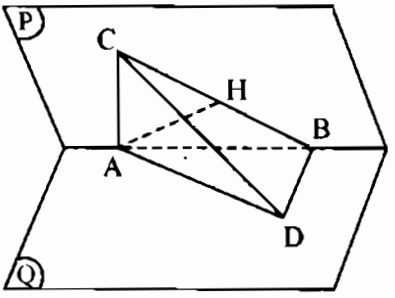
Mà : $R = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{a\left(4 + \tan^2\varphi\right)}{12} \cdot \frac{6}{2a\sqrt{3}\tan\varphi} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}\left(4 + \tan^2\varphi\right)}{12\tan\varphi}$.

Ví dụ 2. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm A, B với $AB = a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) theo a.

(Trích đề thi tuyển sinh Đại học Khối D, năm 2003)

Hướng dẫn giải

• Ta có $(P) \perp (Q)$ và $\Delta = (P) \cap (Q)$ mà $AC \perp \Delta$ nên $AC \perp (Q) \Rightarrow AC \perp AD$ hay $\widehat{CAD} = 90^0$. Tương tự, ta cũng có $BD \perp \Delta$ nên $BD \perp (P) \Rightarrow BD \perp BC$ hay $\widehat{CBD} = 90^0$.



Hình 160

Vậy A, B, C, D nằm trên mặt cầu (S) đường kính CD và bán kính mặt cầu (S) là :

$$R = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 + BD^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2 + BD^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

• Gọi H là trung điểm của BC, ta có $AH \perp BC$ (vì ΔABC cân ở A). Lại có $AH \perp BD$ (vì $BD \perp (P)$ nên ta có $AH \perp (BCD)$

Vậy $d\left(A ; (BCD)\right) = AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Dạng 3. MẶT CẦU NỘI TIẾP HÌNH CHÓP

Phương pháp

a) Mặt cầu nội tiếp hình chóp nằm bên trong hình chóp và tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp. Do đó tâm hình cầu nội tiếp cách đều tất cả các mặt của hình chóp nên nằm trên mặt phẳng phân giác của góc nhị diện tạo bởi hai mặt kề nhau của hình chóp.

b) Điều kiện cần và đủ để một hình chóp S có hình cầu nội tiếp tâm I là trên mặt đáy có một điểm M cách đều tất cả các mặt bên của hình chóp và khi đó tâm I nằm trên đoạn SM.

c) Nếu một khối đa diện n mặt có hình cầu nội tiếp thì ta có thể xem khối đa diện này được ghép lại bởi n hình chóp, mỗi hình chóp có đáy là một mặt của đa diện, các hình chóp này có chung đỉnh là tâm của mặt cầu và có chiều cao bằng nhau, bằng khoảng cách từ tâm mặt cầu tới các mặt của đa diện. Nếu gọi V là thể tích khối đa diện, S_{tp} là diện tích toàn phần khối đa diện và r là bán kính mặt cầu nội tiếp ta có công thức : $r = \dfrac{3V}{S_{tp}}$.

Ví dụ : Trong mặt phẳng (P) cho hình thang cân ABCD có đáy là AB và CD trong đó CD = 4AB và ngoại tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) tại O ta lấy điểm S sao cho OS = 2R.

a) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp SABCD.

b) Chứng tỏ điểm O cách đều bốn mặt bên của hình chóp SABCD. Từ đó hãy tìm tâm và bán kính hình cầu nội tiếp hình chóp.

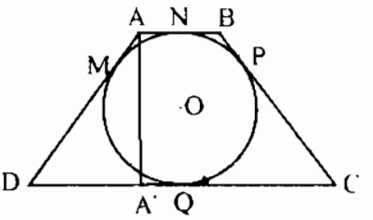
Hướng dẫn giải

a) Hình thang ABCD có cạnh tiếp xúc với đường tròn tại M, N, P, Q. (Hình 161)

Đặt $AB = 2x \Rightarrow CD = 8x$

Ta có : $AD = AN + DQ$

$= x + 4x = 5x$



Hình 161

Từ A hạ $AA' \perp DC$ tại A' ta có :

$$AD^2 = AA'^2 + DA'^2$$

$$25x^2 = 4R^2 + 9x^2$$

Suy ra : $x = \frac{R}{2}$

Ta có : $SM^2 = SO^2 + OM^2 = 4R^2 + R^2 = 5R^2 \Rightarrow SM = R\sqrt{5}$

Do các mặt bên của hình chóp là các tam giác có chiều cao bằng $R\sqrt{5}$ nên ta có diện tích toàn phần S_{tp} của hình chóp là :

$$S_{tp} = \frac{1}{2}SM.(AB + BC + CD + DA) + \frac{1}{2}(AB + CD).NQ$$

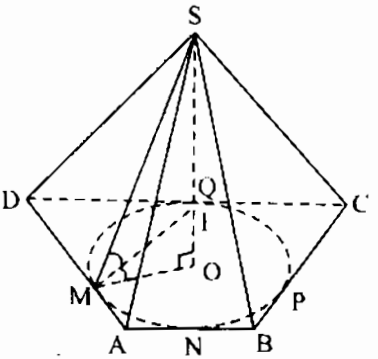
$$= \frac{1}{2}R\sqrt{5}(R + \frac{5R}{2} + 4R + \frac{5R}{2}) + \frac{1}{2}(R + 4R).2R$$

$$= \frac{1}{2}R\sqrt{5}.10R + \frac{1}{2}5R.2R = 5R^2(1 + \sqrt{5})$$

Gọi V là thể tích hình chóp SABCD, $\mathcal{B}$ là diện tích đáy và h là chiều cao của hình chóp ta có :

$$V = \frac{1}{3}.\mathcal{B}.h = \frac{1}{3}5R^2.2R = \frac{10R^3}{3}$$

(Hình 162)



Hình 162

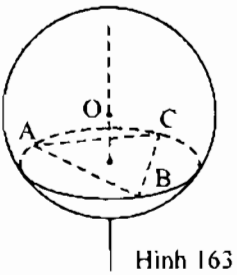
b) Khoảng cách từ O đến bốn mặt bên chính là độ dài của bốn đường cao phát xuất từ O của bốn tam giác vuông bằng nhau là SOM, SON, SOP, SOQ. Từ đó ta suy ra O cách đều bốn mặt bên của hình chóp. Vậy tâm I của mặt cầu nội tiếp hình chóp nằm trên đoạn SO. Vì I cách đều hai mặt SAD và ABCD nên I thuộc phân giác của góc SMO trong mặt phẳng (SMO). Ta tính được bán kính r của mặt cầu nội tiếp theo công thức :

$$r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{10R^3}{5R^2(1 + \sqrt{5})} = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2}.$$

Dạng 4. MẶT CẦU THAY ĐỔI NHƯNG LUÔN CHỨA MỘT ĐƯỜNG TRÒN CỐ ĐỊNH

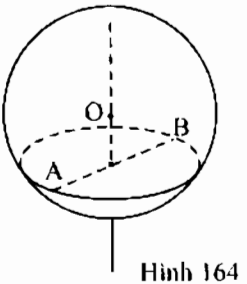
Phương pháp

1) Ta biết rằng bốn điểm không đồng phẳng xác định một mặt cầu. Nếu mặt cầu (S) thay đổi nhưng luôn luôn chứa ba điểm A, B, C cố định và không thẳng hàng thì (S) luôn chứa đường tròn cố định (C) ngoại tiếp tam giác ABC (Hình 163).



Hình 163

2) Nếu mặt cầu S(O, R) thay đổi nhưng luôn chứa hai điểm cố định A, B và có tâm O chạy trên đường trung trực Δ của AB thì mặt cầu (S) luôn chứa đường tròn cố định (C) đường kính AB và nằm trong mặt phẳng (α) và vuông góc với Δ. (Hình 164).



Hình 164

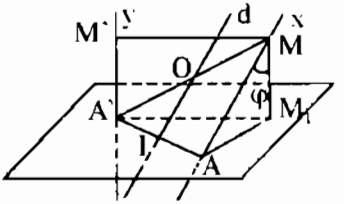
Ví dụ : Cho hai đường thẳng chéo nhau Ax và A'y có AA' là đoạn vuông góc chung. Mặt phẳng (P) chứa AA' và vuông góc với Ax. Đặt AA' = a. Một đường thẳng thay đổi luôn luôn song song với mặt phẳng (P) lần lượt cắt Ax và A'y tại M và M'. Hình chiếu vuông góc của M trên (P) là M_1.

a) Xác định tâm O của mặt cầu đi qua năm điểm A, A', M, M', M_1. Tính diện tích của mặt cầu theo a, x = A'M' và góc $\varphi = (A_x, Ay)$.

b) Chứng minh rằng khi x thay đổi mặt cầu trên luôn luôn chứa một đường tròn cố định.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\widehat{A'M'M} = \widehat{A'AM} = \widehat{A'M_1M} = 90^\circ$. Do đó năm điểm A, A', M, M', M_1 cùng thuộc mặt cầu (S) tâm O đường kính A'M nhận O làm trung điểm và có bán kính $R = \frac{A'M}{2}$ (Hình 165).



Hình 165

Xét tam giác vuông AA'M ta có : $A'M^2 = A'A^2 + AM^2$

Vì $\cos\varphi = \frac{MM_1}{AM}$ nên : $A'M^2 = a^2 + \frac{x^2}{\cos^2\varphi}$

Diện tích mặt cầu :

$$S = 4\pi R^2 = \pi\left(a^2 + \frac{x^2}{\cos^2\varphi}\right).$$

b) Gọi I là trung điểm của AA'. Ta có IO // Ay và như vậy tâm O di động trên đường thẳng d cố định là đường trung trực của AA' và song song với Ay. Vậy mặt cầu luôn luôn chứa đường tròn cố định (C) nhận AA' làm đường kính và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đường thẳng d cố định.

§ 14. MẶT TRỤ TRÒN XOAY – MẶT NÓN TRÒN XOAY

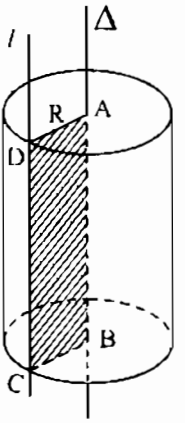
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

a) Cho hai đường thẳng l và Δ song song và cách nhau một khoảng R. Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi quay quanh Δ gọi là *mặt trụ tròn xoay* hay gọi tắt là *mặt trụ*. Δ gọi là *trục* của mặt trụ và l gọi là *đường sinh* của mặt trụ.

Khi quay quanh một đường thẳng chứa cạnh AB của một hình chữ nhật ABCD thì mỗi điểm của miền chữ nhật sẽ sinh ra một đường tròn. Hình gồm tất cả các đường tròn đó gọi là một *khối trụ tròn xoay* hay gọi tắt là *khối trụ*. Khi quay quanh AB, cạnh CD vạch ra một mặt tròn xoay gọi là *mặt xung quanh* của khối trụ.

Hình hợp bởi hai đáy và mặt chung quanh của khối trụ được gọi là *hình trụ tròn xoay*. (Hình 166)

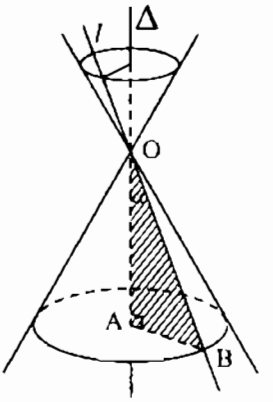


Hình 166

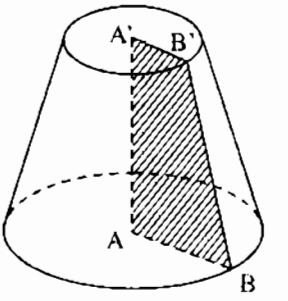
b) Cho hai đường thẳng l và Δ cắt nhau tại O và tạo thành một góc α trong đó $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Mặt nón tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi quay quanh Δ ; Δ gọi là *trục* mặt nón, l gọi là *đường sinh*, điểm O gọi là *đỉnh* của mặt nón.

Khi quay quanh đường thẳng chứa cạnh OA của tam giác AOB vuông tại A, mỗi điểm của miền tam giác sinh ra một đường tròn. Hình gồm tất cả những đường tròn đó gọi là một *khối nón tròn xoay* hay gọi tắt là *khối nón*. Khi quay quanh OA, cạnh OB vạch ra một mặt tròn xoay gọi là *mặt xung quanh* của khối nón. Hình gồm mặt đáy và mặt xung quanh của khối nón đó gọi là *hình nón tròn xoay*. (Hình 167).

Tương tự như trên, cho một hình thang ABB'A' vuông tại A và A' quay quanh cạnh AA'. Hình thang cùng với miền trong của nó tạo thành *khối nón cụt tròn xoay* gọi tắt là *khối nón cụt*. Đường gấp khúc ABB'A' tạo thành *hình nón cụt*, cạnh AB và A'B' tạo thành *hai mặt đáy* của hình nón cụt, cạnh BB' tạo thành *mặt xung quanh* của hình nón cụt. (Hình 168).



Hình 167

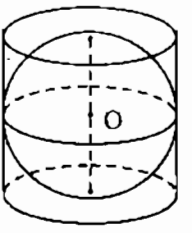


Hình 168

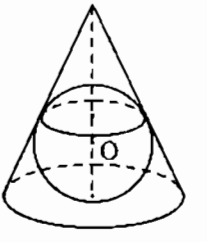
2. Một tổ hợp gồm các hình trụ, nón, cầu

* Một hình cầu gọi là *nội tiếp trong một hình trụ* khi mặt cầu của hình cầu đó tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình trụ và tiếp xúc với hai đáy của hình trụ. (Hình 169)

* Một hình cầu gọi là *nội tiếp trong một hình nón* khi nó có mặt cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và tiếp xúc với đáy của hình nón. (Hình 170)



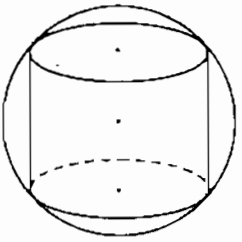
Hình 169



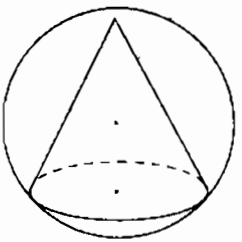
Hình 170

* Một hình cầu gọi là *ngoại tiếp một hình trụ* khi có mặt cầu chứa hai đường tròn đáy của hình trụ. (Hình 171)

* Một hình cầu gọi là *ngoại tiếp hình nón* khi nó có mặt cầu chứa đỉnh và đường tròn đáy của hình nón. (Hình 172)



Hình 171



Hình 172

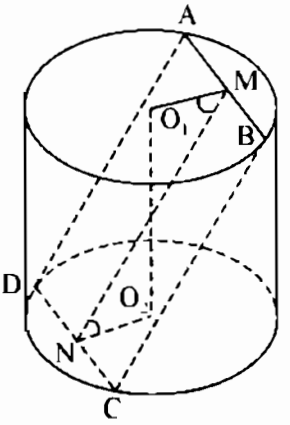
B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ : Bên trong hình trụ tròn xoay có một hình vuông ABCD cạnh a nội tiếp mà hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng hình vuông tạo với đáy của hình trụ một góc 45^0. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ đó.

(Trích đề thi Đại học Ngoại ngữ, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của đáy thứ nhất và thứ hai của hình trụ, M, N theo thứ tự là trung điểm của các dây cung AB và CD. Ta có $MN \perp AB$ và $MN \perp CD$. Theo giả thiết, mặt phẳng hình vuông ABCD tạo với hai mặt đáy hình trụ một góc 45^0. Ta có $\widehat{O_1MN} = \widehat{MNO_2} = 45^0$ và MN = a. Gọi E là trung điểm của đoạn O_1O_2 ta có :



Hình 173

$$NO_2 = O_2E = EO_1 = O_1M = \frac{ME\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Do đó : $O_1O_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bây giờ cần tính bán kính $R = O_2C$ của đáy hình trụ.

$$O_2C^2 = O_2N^2 + NC^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{8}$$

Vậy : $R = O_2C = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ :

$$S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi\frac{a\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$$

Thể tích V của hình trụ :

$$V = \pi R^2.h = \pi\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi 3a^2\sqrt{2}}{16}$$

Chương 5.
DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH

§ 15. DIỆN TÍCH CÁC HÌNH ĐA DIỆN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hình lăng trụ

$$S_{xq} = pl$$

p : chu vi thiết diện thẳng ; l : độ dài cạnh bên.

S_{xq} = chu vi đáy × chiều cao

2. Hình hộp chữ nhật

Hình hộp chữ nhật là hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c.

3. Hình chóp đều n cạnh

$$S_{xq} = \frac{1}{2} \text{ chu vi đáy} \times \text{độ dài trung đoạn}$$

§ 16. THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

1. Khối chóp

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

B : diện tích đáy ; h : chiều cao tương ứng

2. Lăng trụ, hộp

$$V = B.h$$

B : diện tích đáy ; h : chiều cao lăng trụ

3. Khối chóp cụt

$$V = \frac{1}{3}h\left(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1.B_2}\right)$$

B_1 : diện tích đáy thứ nhất ; B_2 : diện tích đáy thứ 2 ; h : chiều cao chóp cụt.

§ 17. DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH TRÒN XOAY

1. Hình trụ

$$S_{xq} = 2\pi Rl$$

$$V = \pi R^2 h$$

R : bán kính đáy ; l : đường sinh hình trụ ; h : chiều cao hình trụ.

2. Hình nón

$$S_{xq} = \pi Rl$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

R : bán kính đáy ; l : đường sinh hình nón ; h : chiều cao hình nón

3. Hình nón cụt

$$S_{xq} = \pi(R_1 + R_2)l$$

$$V = \frac{1}{3}\pi h\left(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2\right)$$

R_1 : bán kính đáy nhỏ ; R_2 : bán kính đáy lớn ; l : đường sinh nón cụt ; h : chiều cao nón cụt.

4. Hình cầu

Diện tích mặt cầu : $S = 4\pi R^2$

R : bán kính mặt cầu

Thể tích khối cầu : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

R : bán kính khối cầu

Chú thích :

Các bài tập của chương này được kết hợp đưa vào trong các đề toán có tính chất tổng hợp ở phần 2.

§ 18. MỘT SỐ KIẾN THỨC BỔ SUNG

1. Bất đẳng thức Côsi

Với $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là những số không âm, ta luôn có

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Trường hợp đặc biệt :

a) Với a, b là hai số không âm ta có : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b.

Áp dụng :

* Cho x và y là hai số không âm, có tổng x + y là một số không đổi. Khi đó tích x.y lớn nhất khi và chỉ khi x = y.

* Cho x và y là hai số không âm, có tích x.y là một số không đổi. Khi đó tổng x + y nhỏ nhất khi và chỉ khi x = y.

b) Với a, b, c là ba số không âm, ta có : $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

Áp dụng :

* Cho x, y, z là ba số không âm, có tổng x + y + z là một số không đổi. Khi đó tích x.y.z lớn nhất khi và chỉ khi x = y = z.

* Cho x, y, z là ba số không tâm có tích x = y = z không đổi. Khi đó tổng x + y + z nhỏ nhất khi và chỉ khi x = y = z.

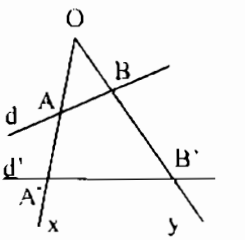
2. Tỉ số diện tích, tỉ số thể tích

a) Nếu hai đa giác đồng dạng theo tỉ số k thì có diện tích tương ứng tỉ lệ theo tỉ số k^2.

b) Nếu hai đa diện đồng dạng theo tỉ số k thì có thể tích tương ứng tỉ lệ theo tỉ số k^3.

c) Cho hai đường thẳng d, d' cắt các cạnh của góc xOy theo thứ tự A, B và A', B'. Ta có :

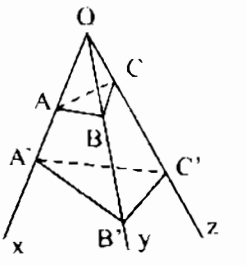
$$\frac{dt\Delta OAB}{dt\Delta OA'B'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$$ (Hình 174)



Hình 174

d) Cho hai mặt phẳng (P) và (P') cắt các cạnh của góc tam diện Oxyz theo thứ tự tại A, B, C và A', B', C'. Ta có :

$$\frac{V_{OABC}}{V_{OA'B'C'}} = \frac{OA.OB.OC}{OA'.OB'.OC'}$$ (Hình 175)



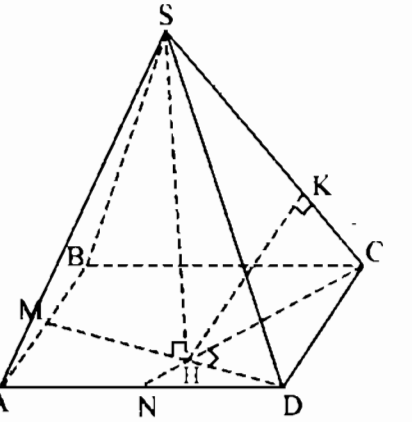
Hình 175

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD ; H là giao điểm của CN với DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.CDNM và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

(Trích đề thi tuyển sinh Đại học Khối A, năm 2010)

Hướng dẫn giải



Hình 176

• Ta có $\Delta AMD = \Delta DNC$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{NCD} \Rightarrow \widehat{NCD} + \widehat{CDM} = 90^0$

$\Rightarrow MD \perp CN$ (tại H)

Tam giác vuông MAD cho

$$MD = \sqrt{AM^2 + AD^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

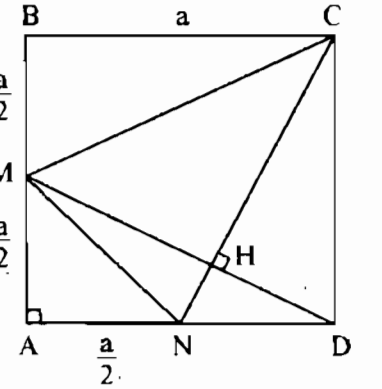
$$\Rightarrow MD = NC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{CMND} = \frac{1}{2} MD.NC = \frac{5a^2}{8}$$

Vì $SH \perp (ABCD)$ nên :

$$V_{S.CDNM} = \frac{1}{3} SH.S_{CMND}$$

$$= \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{5a^2}{8} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{24}$$



Hình 177

• Vì $\begin{cases} DM \perp CN \\ SH \perp DM \text{ (Vì } SH \perp (ABCD)) \end{cases}$

$\Rightarrow DM \perp (SHC) \Rightarrow SC \perp DM$

Kẻ $HK \perp SC$. Vì $DM \perp (SHC)$ nên $DM \perp HK$

$\Rightarrow$ HK là đoạn vuông góc chung của DM và SC $\Rightarrow d(SC, DM) = HK$

Tam giác vuông SHC cho ta : $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HC^2}$. Với $HS = a\sqrt{3}$;

$$HC = \frac{CD^2}{CN} = \frac{a^2}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{2a}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{19}{12a^2}.$$

Vậy $d(SC, DM) = HK = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$; $AA' = 2a$; $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính theo a thể tích khối tứ diện I.ABC và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC).

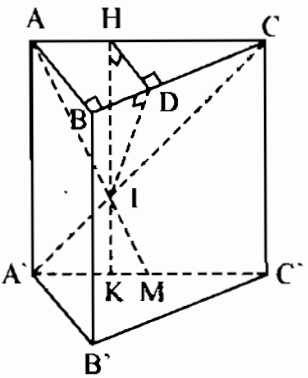
(Trích đề thi tuyển sinh Đại học Khối D, năm 2009)

Hướng dẫn giải

- $AC = \sqrt{A'C^2 - AA'^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB.BC = \frac{1}{2} a.2a = a^2$

Đường thẳng qua I và song song với AA', cắt AC ở H ; cắt A'C' ở K. Ta có $IH \perp AC \Rightarrow IH \perp (ABC)$



Hình 178

- $AM = \sqrt{AA'^2 + A'M^2} = \frac{a\sqrt{21}}{4}$ có

$\frac{IH}{IK} = \frac{AC}{A'M} = 2 \Rightarrow IH = 2IK$

$\Rightarrow IH = \frac{4a}{3}$; $IK = \frac{2a}{3}$

Vậy $V_{I.ABC} = \frac{1}{3} IH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{4a}{3}.a^2 = \frac{4a^2}{9}$.

- Hạ $HD \perp BC$. Vì $\begin{cases} BC \perp HD \\ BC \perp IH \end{cases}$ nên $BC \perp (IHD) \Rightarrow BC \perp ID$

Tam giác vuông HID cho ta : $ID = \sqrt{IH^2 + HD^2}$. Lại có

$$\frac{AB}{HD} = \frac{CA}{CH} = \frac{CH + HA}{CH} = 1 + \frac{HA}{CH} = 1 + \frac{A'K}{CH} = 1 + \frac{IK}{IH} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow HD = \frac{2AB}{3} = \frac{2a}{3} \Rightarrow ID = \sqrt{\left(\frac{4a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$$

$$\Rightarrow S_{IBC} = \frac{1}{2} ID.BC = \frac{1}{2}.\frac{2a\sqrt{5}}{3}.2a = \frac{2a^2\sqrt{5}}{3}$$

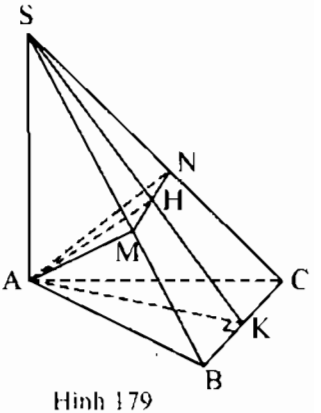
Vậy $d(A;(IBC)) = \dfrac{3V_{I.ABC}}{S_{IBC}} = \dfrac{\dfrac{4a^3}{3}}{2a^2\sqrt{5}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a SA = 2a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính thể tích của khối chóp A.BCNM.

(Trích đề thi tuyển sinh Đại học Khối D, năm 2006)

Hướng dẫn giải

Gọi K là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của A trên SK. Do $\begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp SA \end{cases}$ nên $BC \perp (SAK) \Rightarrow BC \perp AH$. Và $\begin{cases} BC \perp AH \\ AH \perp SK \end{cases}$ nên $AH \perp (SBC)$



Hình 179

Tam giác vuông SAK cho : $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{\dfrac{3a^2}{4}} \Rightarrow AH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$

Tam giác vuông SAB cho : $SA^2 = SM.SB \Rightarrow \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{4a^2}{5a^2} = \dfrac{4}{5}$

Tam giác vuông SAC cho : $SA^2 = SN.SC \Rightarrow \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{SA^2}{SC^2} = \dfrac{4a^2}{5a^2} = \dfrac{4}{5}$

Suy ra : $\dfrac{S_{SMN}}{S_{SBC}} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25} \Rightarrow S_{BMNC} = \dfrac{9}{25}S_{SBC}$

Mà $SK = \sqrt{SA^2 + AK^2} = \sqrt{4a^2 + \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{19}}{2}$

$\Rightarrow S_{SBC} = \dfrac{1}{2}SK.BC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{19}}{2}.a = \dfrac{a^2\sqrt{19}}{4}$

Do đó : $S_{BMNC} = \dfrac{9}{25}.\dfrac{a^2\sqrt{19}}{4} = \dfrac{9a^2\sqrt{19}}{100}$

Vậy thể tích khối chóp A.BCNM là $V = \dfrac{1}{3}AH.S_{BMNC} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{50}$.

Phần II.

ÔN TẬP – HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $\varphi\left(0^0 < \varphi < 90^0\right)$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) theo φ. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a và φ.

(Trích đề thi tuyển sinh Đại học Khối B, năm 2004)

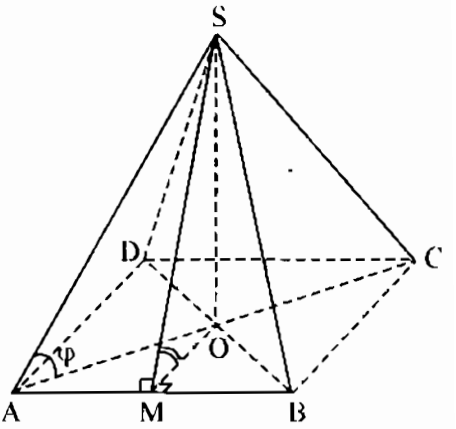
Hướng dẫn giải

• Gọi O là giao điểm của AC và BD vì hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$, suy ra $\widehat{SAO} = \varphi$

Gọi M là trung điểm của AB thì $OM \perp AB$ và $SM \perp AB \Rightarrow$ Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) là $\widehat{SMO}$. Tam giác vuông SOA cho ta :

$$SO = OA.\tan\varphi = \frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi$$

Tam giác vuông SOM cho ta :



Hình 180

$$\tan\widehat{SMO} = \frac{OS}{OM} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2}\tan\varphi$$

• $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}\tan\varphi.$

Bài 2. Cho tam giác ABC, AB = AC. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A (M không trùng với điểm A).

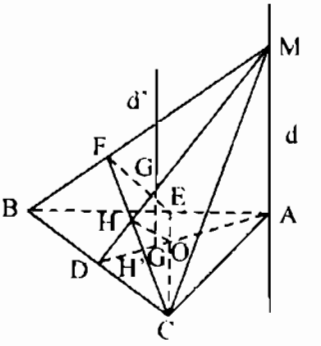
1) Tìm quỹ tích trọng tâm G và trực tâm H của tam giác MBC.

2) Gọi O là trực tâm của tam giác ABC, hãy xác định vị trí của M để thể tích tứ diện OHBC đạt giá trị lớn nhất.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, Khối B, năm 1997)

Hướng dẫn giải

1) Gọi d là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A, D là trung điểm của BC. Ta có AD ⊥ BC, vì AB = AC nên ta suy ra MB = MC. Do đó MD ⊥ BC và trọng tâm G của tam giác MBC nằm trên MD thoả mãn hệ thức $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DM}$. Vậy G là ảnh của M trong phép vị tự tâm D, tỉ số vị tự $\frac{1}{3}$. Do đó khi M chạy trên đường thẳng d thì G chạy trên đường thẳng d' là ảnh của d trong phép vị tự nói trên. Vậy quỹ tích các trọng tâm G của tam giác MBC khi M chạy trên d là đường thẳng d' vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại trọng tâm G' của tam giác ABC. Vì M không trùng với A nên ta phải loại điểm G' trên d' nói trên.



Hình 181

Kẻ CE ⊥ AB, CF ⊥ MB ta có H = DM ∩ CF là trực tâm của tam giác MBC. O = DA ∩ CE là trực tâm của tam giác ABC. Do CE ⊥ AB và CE ⊥ MA nên CE ⊥ (MAB). Vì CF ⊥ MB nên theo định lí ba đường vuông góc ta có EF ⊥ MB. Do đó MB ⊥ (CEF), ta suy ra MB ⊥ OH. Chứng minh tương tự ta có MC ⊥ OH. Từ đó ta suy ra OH ⊥ (MBC) và $\widehat{DHO} = 90^0$. Vậy quỹ tích H, trực tâm của tam giác MBC khi M chạy trên d là đường tròn đường kính DO nằm trong mặt phẳng (D, d). Vì M không trùng với điểm A nên ta phải loại điểm O trên đường tròn nói trên.

2) Gọi HH' là chiều cao của tứ diện OHBC, ta có H' ∈ DO. Gọi V_{OHBC} là thể tích của tứ diện OHBC, ta có

$$V_{OHBC} = \frac{1}{3}\,dt(AOBC).HH'.$$

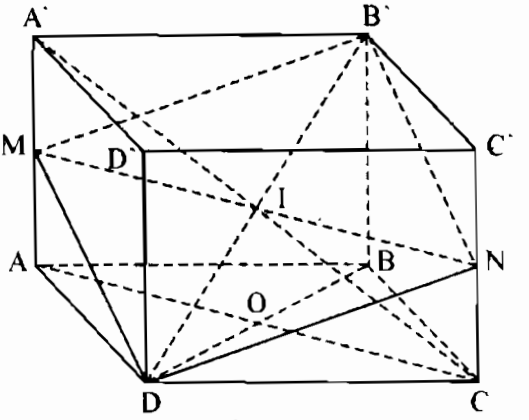
Hình chóp này có đáy OBC cố định nên V_{OHBC} lớn nhất khi và chỉ khi HH' lớn nhất. Điểm H chạy trên đường tròn đường kính OD nên HH' lớn nhất khi $HH' = \frac{1}{2}DO$ nghĩa là DHH' là tam giác vuông cân tại H'. Ta suy ra tam giác DMA lúc đó vuông cân tại A. Vậy muốn tứ diện OHBC có thể tích đạt giá trị lớn nhất, cần chọn M trên d (về hai phía của A) sao cho AM = AD, nghĩa là có hai điểm M_1, M_2 trên d sao cho $AM_1 = AM_2 = AD$.

Bài 3. Cho lăng trụ đứng ABCD.A′B′C′D′ có đáy ABCD là một hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^0$. Gọi M là trung điểm cạnh AA′ và N là trung điểm cạnh CC′. Chứng minh rằng bốn điểm B′, M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Hãy tính độ dài cạnh AA′ theo a để tứ giác B′MDN là hình vuông.

(Trích đề thi tuyển sinh Đại học Khối B, năm 2003)

Hướng dẫn giải

• Ta có A′M // CN và A′M = CN nên A′MCN là hình bình hành, do đó A′C và MN cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường. Ta cũng có tứ giác A′DCB′ là hình bình hành nên trung điểm I của A′C cũng chính là trung điểm của B′D. Vậy tứ giác B′MDN là hình bình hành vì có 2 đường chéo MN và B′D cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường. Do đó : B′, M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng



Hình 182

• Mặt khác, ta lại có $DM^2 = AD^2 + AM^2 = CD^2 + CN^2 = DN^2$

$\Rightarrow DM = DN \Rightarrow B'MDN$ là hình thoi, cho nên B′MDN là hình vuông $\Leftrightarrow MN = B'D \Leftrightarrow B'D = AC$

Vì hình thoi ABCD có $\widehat{A} = 60^0$ nên $AC = 2AO$ (O là giao điểm của AC và BD) $\Rightarrow AC = \sqrt{3}a$. Suy ra B′MDN là hình thoi $\Leftrightarrow B'D = a\sqrt{3} \Leftrightarrow BD^2 + BB'^2 = 3a^2 \Leftrightarrow a^2 + AA'^2 = 3a^2 \Leftrightarrow AA' = a\sqrt{2}$.

Bài 4. Trong mặt phẳng (α) cho đường tròn (T) đường kính AB = 2R. Gọi C là một điểm di động trên (T). Trên đường thẳng d qua A và vuông góc với mặt phẳng (α) lấy điểm S sao cho SA = R. Hạ $AH \perp SB$, $AK \perp SC$.

1) Chứng minh $AK \perp (SBC)$, $SB \perp (AHK)$.

2) Tìm quỹ tích điểm K khi C thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện SAHK.

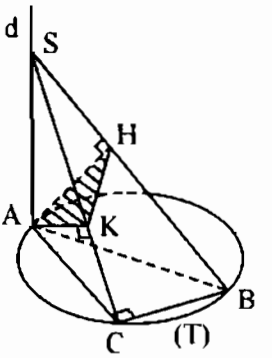
(Trích đề thi Đại học Cần Thơ, năm 1999)

Hướng dẫn giải

1) $\left.\begin{matrix} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AK$;

$\left.\begin{matrix} AK \perp BC \\ AK \perp SC \end{matrix}\right\} \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp SB$; $\left.\begin{matrix} SB \perp AK \\ SB \perp AH \end{matrix}\right\} \Rightarrow SB \perp (AKH)$.

2) Mặt phẳng (AKH) $\perp$ SB nên mặt phẳng (AHK) cố định. Điểm K luôn luôn nhìn đoạn AH cố định dưới một góc vuông nên quỹ tích K là đường tròn đường kính AH, nằm trong mặt phẳng qua A và vuông góc với SB.



Hình 183

Tứ diện SAHK có chiều cao SH cố định nên sẽ có diện tích lớn nhất khi diện tích đáy AHK lớn nhất. Tam giác AHK nội tiếp trong đường tròn cố định có đường kính AH, có diện tích lớn nhất khi K là trung điểm nửa cung tròn đường kính AH. (có hai vị trí của K trên đường tròn). Ta có :

$$SB^2 = SA^2 + AB^2 = R^2 + 4R^2 = 5R^2 \Rightarrow SB = R\sqrt{5}$$

$$AH.SB = SA.AB \Rightarrow SH = \frac{SA.AB}{SB} = \frac{R.2R}{R\sqrt{5}} = \frac{2R}{\sqrt{5}}$$

$$SA^2 = SH.SB \Rightarrow SH = \frac{SA^2}{SB} = \frac{R^2}{R\sqrt{5}} = \frac{R\sqrt{5}}{5}$$

Do đó : $$V_{max\,SAHK} = \frac{1}{3} SH.S_{max\,\Delta AHK} = \frac{1}{3} \cdot \frac{R\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{AH}{2}\right)^2$$

$$V_{max} = \frac{R^3\sqrt{5}}{75}.$$

Bài 5. Cho tứ diện ABCD có AB = BC = CA = AD = DB = $a\sqrt{2}$ và CD = 2a.

1) Chứng minh rằng AB vuông góc với CD. Hãy xác định đường vuông góc chung của AB và CD.

2) Tính thể tích tứ diện ABCD.

3) Xác định tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

4) Gọi điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm I trên mặt phẳng (ABC). Chứng minh H là trực tâm của tam giác ABC.

(Trích đề thi ĐHSP Quy Nhơn, năm 1997)

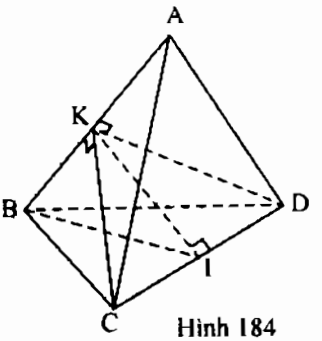
Hướng dẫn giải

1) Gọi K và I lần lượt là trung điểm của AB và CD, ta có DK ⊥ AB, CK ⊥ AB. Vậy AB ⊥ mp(CDK) ⇒ AB ⊥ CD và AB ⊥ IK. Ta lại có KC = KD vì chúng là chiều cao của hai tam giác đều bằng nhau. Do đó IK ⊥ CD. Vậy IK là đường vuông góc chung của AB và CD.

2) Tam giác ACD vuông tại A vì có : $AC^2 + AD^2 = 2a^2 + 2a^2 = 4a^2 = CD^2$.

Vậy : IA = IC = ID = a.

Gọi V_{ABCD} là thể tích của tứ diện ABCD. ta có :



Hình 184

$$V_{ABCD} = 2V_{DABI} = 2\frac{1}{3}ID.(dt\,\Delta ABI)$$

Mà : $dt\,\Delta ABI = \frac{1}{2}AB.IK = \frac{1}{2}AB\sqrt{IA^2 - AK^2}$

$$= \frac{1}{2}a\sqrt{2}.\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a^2}{2}$$

Do đó $V_{ABCD} = 2V_{DABI} = \frac{2}{3}a.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{3}$

3) Tam giác BCD vuông tại B vì có :

$$BC^2 + BD^2 = 2a^2 + 2a^2 = 4a^2 = CD^2$$

Do đó IB = IC = ID = IA. Vậy trung điểm I của CD là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

4) Ta có : IA = IB = IC = a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm I trên mặt phẳng (ABC) ta có $HA = HB = HC = \sqrt{a^2 - IH^2}$.

Vậy H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC, do đó H cũng là trực tâm của tam giác ABC.

Bài 6. Cho tứ diện SABC có các cạnh bên SA = SB = SC = d và $\widehat{ASB} = 120^o$, $\widehat{BSC} = 60^o$, $\widehat{ASC} = 90^o$.

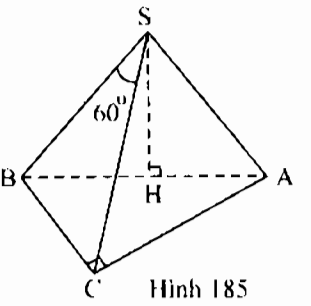
1) Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông.

2) Tính thể tích tứ diện SABC.

3) Tính bán kính hình cầu nội tiếp của tứ diện SABC.

(Trích đề thi Học viện Chính trị Quốc gia Hồ Chí Minh, năm 1999)

Hướng dẫn giải



Hình 185

1) Tam giác SBC có SB = SC = d và góc $\widehat{BSC} = 60^\circ$ nên đó là tam giác đều. Do đó BC = d.

Tam giác SAB có SA = SB = d và góc $\widehat{ASB} = 120^\circ$, đó là tam giác cân nên $\widehat{SBA} = \widehat{SAB} = 30^\circ$. Gọi H là trung điểm của AB ta có $AH = BH = \frac{d\sqrt{3}}{2}$. Do đó $AB = d\sqrt{3}$.

Tam giác SAC có SA = SC = d và $ASC = 90^\circ$ nên $AC = d\sqrt{2}$.

Xét tam giác ABC ta có :

$$BC^2 + AC^2 = d^2 + 2d^2 = 3d^2 = AB^2.$$

Theo định lí Pitago đảo ta suy ra tam giác ABC vuông tại C.

2) Vì SA = SB = SC nên ta suy ra hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt phẳng (ABC) phải trùng với trung điểm H của đoạn AB vì ta có HA = HB = HC. (H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ABC với AB là cạnh huyền). Vậy SH là đường cao của hình chóp SABC. Vì $\widehat{ASB} = 120^\circ$ nên $SH = \frac{SB}{2} = \frac{d}{2}$. Gọi $S_{\Delta ABC}$ là diện tích tam giác ABC ta có :

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC.AC = \frac{1}{2}d.d\sqrt{2} = \frac{d^2\sqrt{2}}{2}$$

Gọi V_{SABC} là thể tích tứ diện SABC ta có :

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}\frac{d}{2}.\frac{d^2\sqrt{2}}{2} = \frac{d^3\sqrt{2}}{12}$$

3) Gọi O là tâm hình cầu nội tiếp tứ diện SABC. Ta có bốn hình chóp đỉnh O có chiều cao bằng nhau và bằng bán kính r của hình cầu nội tiếp và các mặt đáy là các mặt của tứ diện SABCD. Ta có :

$$dt(\Delta SBC) = \frac{1}{2}d.\frac{d\sqrt{3}}{2} = \frac{d^2\sqrt{3}}{4},$$

$$dt(\Delta SAB) = \frac{1}{2}AB.SH = \frac{1}{2}d\sqrt{3}.\frac{d}{2} = \frac{d^2\sqrt{3}}{4},$$

$$dt(\Delta SAC) = \frac{1}{2}d.d = \frac{d^2}{2}.$$

Vậy diện tích toàn phần của tứ diện là :

$$S_{tp} = d^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = d^2\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{2}\right).$$

Mặt khác, ta có : $V_{SABC} = \frac{1}{3} r S_{tp}$

Do đó : $r = \frac{3V_{SABC}}{S_{tp}} = \frac{3d^3\sqrt{2}}{12} : \frac{d^2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1\right)}{2} = \frac{d\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1\right)}.$

Bài 7. Cho hình chóp tam giác đều SABC có đường cao SO = 1 và đáy ABC có cạnh bằng $2\sqrt{6}$. Điểm M, N là trung điểm của cạnh AC, AB tương ứng. Tính thể tích hình chóp SAMN và bán kính hình cầu nội tiếp hình chóp đó.

(Trích đề thi Đại học Kinh tế Quốc dân Hà Nội, năm 1997)

Hướng dẫn giải

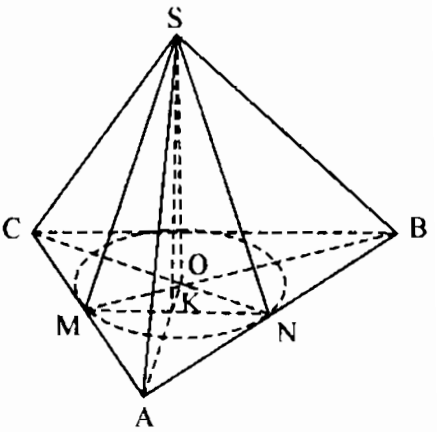
Do ABC là tam giác đều nên ta suy ra AMN cũng là tam giác đều và có

$$AM = MN = NA = \frac{AB}{2} = \sqrt{6}.$$

Muốn tính thể tích hình chóp SAMN, ta cần tính diện tích của tam giác AMN.

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} AM.AN.\sin 60^0$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{6}.\sqrt{6}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$



Hình 186

Do đó thể tích V_{SAMN} của hình chóp SAMN là :

$$S_{SAMN} = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{2}.1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Gọi O_1 là tâm hình cầu nội tiếp hình chóp SAMN và r là bán kính hình cầu đó. Ta chia hình chóp SAMN thành bốn hình chóp có chung đỉnh O_1 và có đáy là bốn mặt của hình chóp đó. Các hình chóp này đều có chiều cao bằng r. Ta có :

$$V_{SAMN} = \frac{1}{3} r\left(dt\Delta AMN + dt\Delta SAM + dt\Delta SAN + dt\Delta SMN\right)$$

Vì SABC là hình chóp đều nên chân đường cao O trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Do đó OM ⊥ AC, ON ⊥ AB và do SO ⊥ (ABC) nên ta suy ra SM ⊥ AC, SN ⊥ AB và SM = SN.

Xét tam giác vuông AOM :

$$OM = AM\text{tg}30^0 = \sqrt{6}.\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{2} = ON$$

Xét tam giác vuông SOM :

$$SM^2 = OM^2 + SO^2 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow SM = \sqrt{3}$$

Do đó : $dt\Delta SAM = \frac{1}{2}AM.SM = \frac{1}{2}.\sqrt{6}.\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Tương tự ta tính được : $dt\Delta SAN = \frac{1}{2}AN.SN = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Gọi K là trung điểm của MN. Vì SM = SN nên SK ⊥ MN.

Ta có : $SK^2 = SM^2 - KM^2 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ (vì $MN = AM = \frac{AC}{2}$) suy ra $SK = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Do đó :

$$dt\Delta SMN = \frac{1}{2}MN.SK = \frac{1}{2}.\sqrt{6}.\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$dt\Delta AMN = \frac{1}{2}MN.AK = \frac{1}{2}.\sqrt{6}.\frac{\sqrt{6}.\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Vậy : $V_{SAMN} = \frac{1}{3}r\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (theo kết quả trên)

Do đó bán kính hình cầu nội tiếp $r = \frac{\sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

Bài 8. Cho hình chóp tam giác SABC có SA = x, BC = y, các cạnh còn lại đều bằng 1.

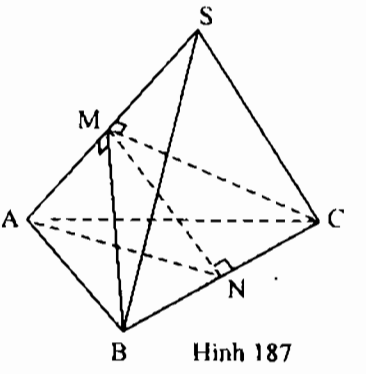
1) Thể tích hình chóp theo x, y.

2) Với x, y nào thì thể tích hình chóp lớn nhất ?

(Trích Đề thi Đại học An ninh, năm 1999)

Hướng dẫn giải

1) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Theo giả thiết các tam giác BAS và CAS bằng nhau (c.c.c), cân ở B và C nên BM ⊥ SA, CM ⊥ SA. Do đó SA ⊥ mp(BMC) và hình chóp SABC có thể tích là :



Hình 187

$$V = \frac{1}{3}SA.dt\Delta BMC = \frac{x}{3}.dt\Delta BMC.$$

Ta có : MB = MC = $\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ nên tam giác BMC cân tại M. Do đó MN ⊥ BC.

$$MN = \sqrt{BM^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{4}\right) - \frac{y^2}{4}} = \sqrt{\left(1-\frac{x^2+y^2}{4}\right)}$$

$$dt\Delta BMC = \frac{1}{2}BC.MN = \frac{1}{2}.y.\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{4}}$$

Vậy ta tính được thể tích của hình chóp SABC là :

$$V = \frac{xy}{6}\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{4}}$$

2) Ta có : $(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy.$

Do đó : $\frac{x^2+y^2}{4} \geq \frac{xy}{2}$

$$V = \frac{xy}{6}\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{4}} \leq \frac{xy}{6}\sqrt{1-\frac{xy}{2}} = \frac{1}{6}\sqrt{(xy)^2.\frac{2-xy}{2}}$$

Suy ra : $V \leq \frac{1}{6}\sqrt{2.\frac{xy}{2}.\frac{xy}{2}.(2-xy)}$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có :

$$\frac{xy}{2}.\frac{xy}{2}.(2-xy) \leq \left(\frac{\frac{xy}{2}+\frac{xy}{2}+(2-xy)}{3}\right)^3$$

Do đó : $V \le \frac{1}{6}\sqrt{2\left(\frac{\frac{xy}{2}+\frac{xy}{2}+(2-xy)}{3}\right)^3}$

$$V \le \frac{1}{6}\sqrt{\frac{16}{27}} = \frac{2\sqrt{3}}{27} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2xy \\ \frac{xy}{2}=2-xy \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Kết luận :

Với $x=y=\frac{2}{\sqrt{3}}$ thì thể tích V của hình chóp lớn nhất.

Bài 9. Cho một hình chóp tứ giác đều, tất cả các cạnh đều bằng a.

a) Tính thể tích hình chóp SABCD.

b) Tính khoảng cách từ tâm mặt đáy ABCD đến các mặt bên của hình chóp.

(Trích Đề thi Đại học Đà Nẵng, Khối D, năm 1997)

Hướng dẫn giải

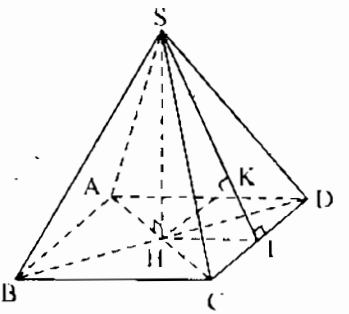
a) Gọi H là tâm của hình vuông ABCD. Ta có diện tích đáy ABCD của hình chóp bằng a^2. Hình chóp có chiều cao là SH vì SH ⊥ mp(ABCD).

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Do đó thể tích V_{SABCD} của hình chóp là :

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}.dt(ABCD).SH = \frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

b) Gọi I là trung điểm của CD. Ta có HI ⊥ CD và SI ⊥ CD. Trong mp(SHI) vẽ HK ⊥ SI tại K, ta có HK ⊥ CD vì CD ⊥ mp(SHI) ⊃ HK. Do đó HK là khoảng cách từ tâm mặt đáy đến mặt bên của hình chóp vì HK ⊥ mp(SCD). (Vì hình chóp tứ giác đều nên các khoảng cách từ tâm mặt đáy đến các mặt bên này đều bằng nhau).



Hình 188

Tam giác vuông SHI ta có : $SH.HI = HK.SI$

Do đó : $HK = \frac{SH.HI}{SI}$

Ta có : $SH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $HI = \frac{a}{2}$, $SI = \sqrt{SH^2 + HI^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Thay các giá trị vừa tìm được vào biểu thức trên ta có :

$$HK = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Bài 10. Cho tam giác ABC tại A có AB = AC = a và góc $\widehat{BAC} = 2\alpha$. Trên đường thẳng d qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm S sao cho SA = 2a. Gọi I là trung điểm của BC. Hạ AH ⊥ SI.

1) Chứng minh AH ⊥ (SBC). Tính độ dài AH theo a, α.

2) Gọi K là một điểm thay đổi trên đoạn AI, đặt $\frac{AK}{AI} = x$. Mặt phẳng (R) qua K và vuông góc với AI cắt các cạnh AB, AC, SC, SB lần lượt tại M, N, P, Q. Tứ giác MNPQ là hình gì ? Tính diện tích tứ giác này.

(Trích đề thi ĐHQG Tp.HCM, Khối D, năm 1999)

Hướng dẫn giải

1) Ta có AB = AC do đó AI ⊥ BC.

Vì SA ⊥ mp(ABC) và AI ⊥ BC nên theo định lí ba đường vuông góc ta có SI ⊥ BC.

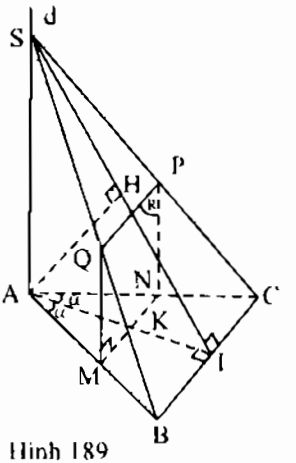
Vậy BC ⊥ mp(SAI) suy ra BC ⊥ AH. Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} AH \perp BC \\ AH \perp SI \end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp mp(SBC)$$

Ta có : AH.SI = SA.AI

Do đó : $AH = \frac{SA.AI}{SI}$, trong đó SA = 2a, AI = $AB\cos\alpha = a\cos\alpha$, $SI = \sqrt{SA^2 + AI^2}$

$= \sqrt{4a^2 + a^2\cos^2\alpha} = a\sqrt{\cos^2\alpha + 4}$



Hình 189

Vậy : $AH = \frac{2a.a\cos\alpha}{a\sqrt{\cos^2\alpha + 4}} = \frac{2a\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + 4}}$

2) Ta có

$$\left.\begin{array}{l} (R) \perp AI \\ BC \perp AI \end{array}\right\} \Rightarrow BC // (R) \Rightarrow MN // PQ // BC$$

$$\left.\begin{array}{l}(R)\perp AI\\ SA\perp AI\end{array}\right\}\Rightarrow SA//(R)\Rightarrow MQ//NP//SA$$

Suy ra MNPQ là hình bình hành

Mặt khác, ta có : $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp BC$ nên tứ giác MNPQ là hình chữ nhật vì nó có hai cạnh liên tiếp vuông góc với nhau : $MN\perp MQ$.

Theo giả thiết : $\dfrac{AK}{AI}=x$ mà $\dfrac{AK}{AI}=\dfrac{MN}{BC}=x$

Suy ra : $MN=xBC=x.2AB\sin\alpha=2ax\sin\alpha$

Ta có : $\dfrac{AK}{AI}=\dfrac{x}{1}\Rightarrow\dfrac{AI-AK}{AI}=\dfrac{1-x}{1}$

Suy ra : $\dfrac{IK}{AI}=\dfrac{MB}{AB}=\dfrac{MQ}{SA}=\dfrac{1-x}{1}$

Vậy : $MQ=(1-x)SA=(1-x)2a$.

Từ đó ta có diện tích thiết diện hình chữ nhật MNPQ là $S_{MNPQ}=MN.MQ=2ax\sin\alpha(1-x)2a=4a^2x(1-x)\sin\alpha$.

Bài 11. Cho tam giác vuông cân ABC có cạnh huyền AB = 2a. Trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC), lấy một điểm S khác A.

1) Chứng minh tứ diện SABC chỉ có một cặp đối diện vuông góc với nhau.

2) Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC. Tính bán kính mặt cầu này trong trường hợp mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 30°.

3) Tìm quỹ tích tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC khi S chạy trên $d(S\neq A)$.

4) Lấy S' đối xứng với S qua A, gọi M là trung điểm của SC. Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng đi qua S', M và song song với BC cắt tứ diện SABC. Tính diện tích của thiết diện đó khi $SA=a\sqrt{2}$.

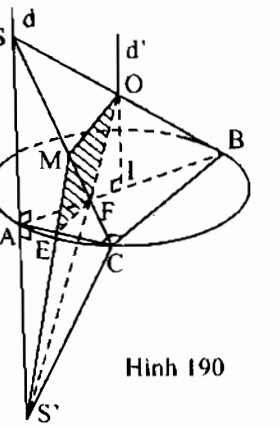
(Trích đề thi ĐHSP Vinh, năm 1997)

Hướng dẫn giải

$SA\perp mp(ABC)\Rightarrow SA\perp BC$.

Nếu $AC \perp SB$ thì $AC \perp mp(SAC)$ (vì $AC \perp SA$). Từ đó ta suy ra $AC \perp AB$ là vô lí vì theo giả thiết ta có $\widehat{CAB} = 45^o$. Vậy AC không vuông góc với SB.

Tương tự ta chứng minh AB không vuông góc với SC. Như vậy tứ diện SABC chỉ có một cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau là SA và BC.



Hình 190

2) Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Vì tam giác ABC vuông cân tại C nên ta có IA = IB = IC. Vậy I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Do đó tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC phải nằm trên đường thẳng d' vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại I. Ta suy ra d' // d do đó d' cắt SB tại trung điểm O của SB. Ta có : OB = OS = OA = OC và như vậy O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ diện SABC.

Trong trường hợp mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 30^o thì góc phẳng của nhị diện tạo nên bởi hai mặt phẳng đó chính là góc $\widehat{SCD}$. Thật vậy, vì $SA \perp mp(ABC)$; $AC \perp CB$ nên $SC \perp CB$, theo định lí ba đường vuông góc. Do đó $\widehat{SCA} = 30^o$. Vì AB = 2a nên ta có $AC = a\sqrt{2}$, ta suy ra :

$$SA = AC \tan 30^o = a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện khi $\widehat{SCA} = 30^o$.

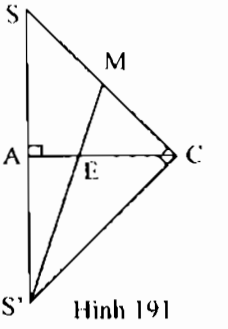
Ta có : $R = \frac{SB}{2} = OA = OB = OC = OS$.

$$SB^2 = SA^2 + AB^2 = \frac{6a^2}{9} + 4a^2 = \frac{42a^2}{9} \Rightarrow SB = \frac{a\sqrt{42}}{3}$$

Vậy : $R = \frac{SB}{2} = \frac{a\sqrt{42}}{6}$.

3) Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC là trung điểm O của đoạn SB. Khi S chạy trên d thì điểm O chạy trên đường thẳng d' vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại trung điểm I của đoạn AB. Vì $S \neq A$ nên ta loại điểm I trên d' và như vậy quỹ tích tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC là đường thẳng d' (đã trừ điểm I) nằm trong mặt phẳng (SAB) và vuông góc với trung điểm I của AB. Khi S trùng với A, tứ diện SABC suy biến thành tam giác ABC, tâm O của mặt cầu trùng với tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

4) Với $SA = a\sqrt{2}$, ta có $S'A = a\sqrt{2}$. Khi đó tam giác SS'C trở thành tam giác vuông cân tại C. Gọi $E = S'M \cap AC$. Mặt phẳng đi qua S', M song song với BC cắt tứ diện SABC theo hai đoạn giao tuyến MO và EF song song với BC. Vì MO // BC mà $BC \perp mp(SAC)$ nên $MO \perp (SAC)$ suy ra $MO \perp ME$. Ta được thiết diện là hình thang OMEF vuông tại M và E. Hình thang này có $MO = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Ta có E là trọng tâm của tam giác SS'C vì CA và S'M là hai trung tuyến. Do đó $\frac{S'E}{SM} = \frac{2}{3} = \frac{CE}{CA}$. Gọi S_{OMEF} là diện tích thiết diện hình thang ta có :



Hình 191

$$S_{OMEF} = \frac{MO + EF}{2} ME.$$

trong đó : $MO = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\frac{EF}{MO} = \frac{S'E}{SM} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF = \frac{2}{3} MO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

$$S'M^2 = MC^2 + CS'^2 = \left(\frac{SC}{2}\right)^2 + (2a)^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$$

$$\Rightarrow S'M = a\sqrt{5} \Rightarrow ME = \frac{1}{3} S'M = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

Vậy $S_{OMEF} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{3} = \frac{5a\sqrt{2}}{6.2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{5a^2\sqrt{10}}{36}$

Bài 12. Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm I (A đối diện với C). Các nửa đường thẳng Ax, Cy vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và ở về cùng một phía đối với mặt phẳng đó. Cho điểm M không trùng với A trên Ax, cho điểm N không trùng với C trên Cy. Đặt AM = m, CN = n.

1) Tính thể tích của hình chóp BAMNC (đỉnh B, đáy AMNC).

2) Tính MN theo a, m, n và tìm điều kiện đối với a, m, n để góc $\widehat{MIN}$ là góc vuông.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, Khối D, năm 1997)

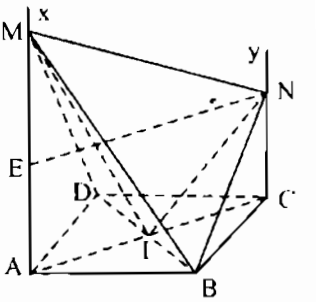
Hướng dẫn giải

1) Hình chóp BAMNC có đáy AMNC là hình thang vuông tại A và C. Gọi V_{BAMNC} là thể tích của hình chóp BAMNC ta có :

$V_{BAMNC} = \frac{1}{3}(dtAMNC).BI$ trong đó BI là chiều cao vì $BI \perp mp(AMNC)$.

Ta có :

$$dtAMNC = \frac{m+n}{2}.AC = \frac{m+n}{2}.a\sqrt{2}$$



Hình 192

Do đó : $V_{BAMNC} = \frac{1}{3}.\frac{m+n}{2}.a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{6}(m+n)a^2$

2) Trong mặt phẳng (Ax, Cy) vẽ $NE // CA$ cắt Ax tại E. Ta có tam giác MNE vuông tại E nên :

$$MN^2 = ME^2 + EN^2 \ (EN = AC)$$

$$= (m-n)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = (m-n)^2 + 2a^2$$

Vậy : $MN = \sqrt{2a^2 + (m-n)^2}$

Ta có : $MI^2 = MA^2 + AI^2 = m^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = m^2 + \frac{a^2}{2}$

$$NI^2 = NC^2 + CI^2 = n^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = n^2 + \frac{a^2}{2}$$

Điều kiện cần và đủ để tam giác MNI vuông tại I là :

$$MI^2 + NI^2 = MN^2 \Leftrightarrow \widehat{MIN} = 90^0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + n^2 + a^2 = (m-n)^2 + 2a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2mn = 0.$$

Bài 13. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D ; $AB = AD = 2a$; $CD = a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD), tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

(Trích đề thi tuyển sinh Đại học Khối A, năm 2009)

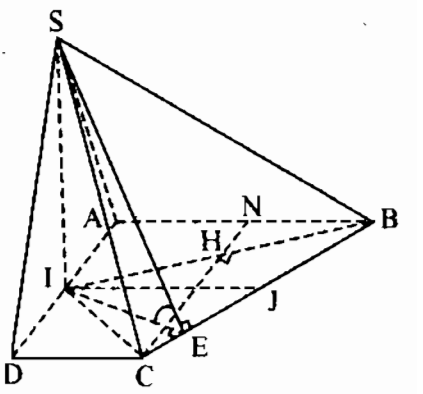
Hướng dẫn giải

• Vì $\begin{cases}(SBI)\perp(ABCD)\\(SCI)\perp(ABCD)\\(SBI)\cap(SCI)=SI\end{cases}\Rightarrow SI\perp(ABCD)$

• Hạ $IE\perp BC\,(E\in BC)$. Vì $SI\perp(ABCD)$ nên $BE\perp SE\Rightarrow \widehat{IES}$ là 2 góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABCD)

• $\Rightarrow \widehat{IES}=60^0$

• Gọi N, J lần lượt là trung điểm của AB và BC. Ta có $IJ\perp CN$ tại trung điểm H của CN



Hình 193

• IJ là đường trung bình của hình thang ABCD nên $IJ=\frac{1}{2}(ABCD)=\frac{3a}{2}$

• $CH=\frac{1}{2}CN=\frac{1}{2}AD=a$; $CB=\sqrt{CN^2+NB^2}=a\sqrt{5}$

• $S_{ICJ}=\frac{1}{2}CH.IJ=\frac{1}{2}IE.CJ\Rightarrow IE=\frac{CH.IJ}{CJ}=\frac{a.\frac{3a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}}=\frac{3a}{\sqrt{5}}$

• Tam giác vuông SIE cho ta : $SI=IE.\tan\widehat{SEI}=\frac{3a}{\sqrt{5}}.\sqrt{3}=\frac{3a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SI.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{3a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.\frac{1}{2}.2a.(2a+a)=\frac{3a^3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

Bài 14. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, SA = AB = a.

1) Tính diện tích tam giác SBD theo a.

2) Chứng minh rằng $BD\perp SC$.

3) Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SBD).

(Trích đề thi ĐHSP Vinh, năm 1999)

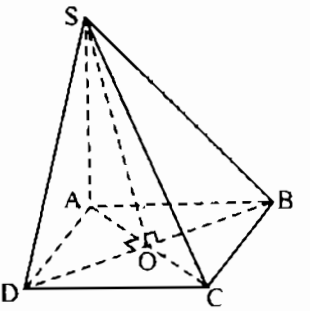
Hướng dẫn giải

1) Gọi O là tâm hình vuông ABCD, ta có AC ⊥ BD. Vì SA ⊥ mp(ABCD), AO ⊥ BD nên theo định lí ba đường vuông góc ta có SO ⊥ BD. Diện tích tam giác SBD :

$$dt(SBD) = \frac{1}{2}BD.SO = \frac{1}{2}a\sqrt{2}.\sqrt{SA^2 + AO^2}$$

$$= \frac{1}{2}a\sqrt{2}.\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

2) $\left.\begin{matrix} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC.$



Hình 194

3) Vì BD ⊥ (SAC) nên (SBD) ⊥ (SAC) và SO là giao tuyến của hai mặt phẳng đó. Vậy $\widehat{OSC} = \varphi$ là góc giữa SC và mặt phẳng (SBD). Đối với tam giác SOC ta có :

$$OC^2 = SO^2 + SC^2 - 2SO.SC\cos\varphi$$

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2\left(a\sqrt{2}\right) - 2\sqrt{\frac{3a^2}{2}.3a^2}.\cos\varphi$$

$$\frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2} + 3a^2 - 3a^2\sqrt{2}\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Vậy góc giữa SC và mặt phẳng (SBD) là góc φ với $\cos\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Bài 15. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều với AD = 2a, AB = BC = CD = a và đường cao SO = $a\sqrt{3}$ trong đó O là trung điểm của AD.

1) Tính thể tích hình chóp SABCD.

2) Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SD. Hãy xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α).

(Trích đề thi ĐHSP Quy Nhơn, năm 1999)

Hướng dẫn giải

1) Diện tích của lục giác đều ABCD là :

$$S = 3\frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$

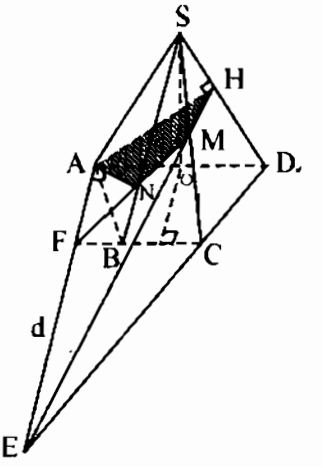
Thể tích của hình chóp SABCD có chiều cao h = SO = $a\sqrt{3}$ là :

$$V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2\cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{4}.$$

2) Mặt phẳng (α) qua điểm A và vuông góc với SD nên (α) $\perp$ (SAD). Hai mặt phẳng (α) và (ABCD) cùng vuông góc với (SAD) nên có giao tuyến d vuông góc (SAD). Giao tuyến d này đi qua điểm A chung của hai mặt phẳng và d $\perp$ AD tại A. Do đó ta xác định thiết diện như sau :

Trong mp(ABCD) dựng đường thẳng d vuông góc với AD tại A. Đường thẳng d này cắt BC tại F và cắt DC tại E.

Gọi M = EH $\cap$ SC và N = MF $\cap$ SB. Ta được thiết diện là AHMN.



Hình 195

Chú thích : Ta tính được FC = $\frac{3}{2}a$ và ta có :

$$\frac{FC}{AD} = \frac{\frac{3}{2}a}{2a} = \frac{3}{4} = \frac{EC}{ED} \Rightarrow ED = 4a$$

AED là một nửa tam giác đều có ED = 4a, AD = 2a nên có AE = $2a\sqrt{3}$

Bài 16. Trên các cạnh Ox, Oy, Oz của tam diện vuông Oxyz, lấy lần lượt ba điểm A, B, C với OA = a, OB = b, OC = c. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC.

1) Tính độ dài OH và diện tích tam giác ABC.

2) Khi a, b, c thay đổi sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = k^2$ với k là hằng số dương, tìm giá trị lớn nhất của độ dài OH, của diện tích tam giác ABC.

3) Chứng minh rằng $a^2 \tan A = b^2 \tan B = c^2 \tan C$.

(Trích đề thi Đại học Nông nghiệp Tp. HCM, năm 1995)

Hướng dẫn giải

1) Vẽ OC' $\perp$ AB tại C', ta có CC' $\perp$ AB. (H $\in$ CI). Xét tam giác vuông OCC' ta có :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OC'^2} + \frac{1}{OC^2}$$

Mà : $\frac{1}{OC'^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$. Nên : $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

Suy ra : $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2}$

$$OH = \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}$$

Ta có : $dt\Delta ABC = \frac{3V_{OABC}}{OH}$

Mà : $V_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} abc = \frac{1}{6} abc$

Nên : $dt\Delta ABC = \frac{abc\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}{2abc} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$.

2) Ta có : $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2}}$

Do đó : $OH \leq \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{abc}}$ (1)

Mặt khác : $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Leftrightarrow k \geq \sqrt{3}\sqrt[3]{abc}$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $OH \leq \frac{k}{3}$. Vậy OH lớn nhất khi $OH = \frac{k}{3}$. Khi đó $a = b = c$ nên $3a^2 = k^2$ và giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC là :

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3a^4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{k^2\sqrt{3}}{6}$$

Chú ý : Có thể tính diện tích tam giác ABC bằng cách khác như sau :

Vì OA = OB = OC = a nên AB = BC = CA = $a\sqrt{2}$.

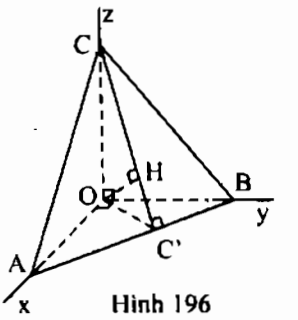
Do đó diện tích tam giác ABC là :

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}.\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{k^2\sqrt{3}}{6}$$

3) Tam giác CC'A vuông tại C' nên ta có :

$$\tan A = \frac{CC'}{AC'} \quad (1)$$

Tam giác CC'B vuông tại C' nên ta có :



Hình 196

$$\tan B = \frac{CC'}{C'B} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{C'B}{AC'}$ (3)

Tam giác OAB vuông tại O có OC' là đường cao nên ta có :

$$OA^2 = AC'.AB \text{ và } OB^2 = BC'.BA$$

Do đó : $\frac{OB^2}{OA^2} = \frac{BC'.BA}{AC'.AB} = \frac{BC'}{AC'} = \frac{b^2}{a^2}$ (4)

Từ (3) và (4) ta có : $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{b^2}{a^2}$ hay $a^2 \tan A = b^2 \tan B$.

Chứng minh tương tự ta có :

$$\frac{\tan A}{\tan C} = \frac{c^2}{a^2} \text{ hay } a^2 \tan A = c^2 \tan C$$

Tóm lại ta có : $a^2 \tan A = b^2 \tan B = c^2 \tan C$ (đpcm).

Bài 17. Cho góc tam diện Sxyz với $\widehat{xSy} = 120^\circ$, $\widehat{ySz} = 60^\circ$, $\widehat{zSx} = 90^\circ$. Trên các tia Sx, Sy, Sz theo thứ tự lấy các điểm A, B, C sao cho : SA = SB = SC = a.

1) Chứng tỏ rằng tam giác ABC vuông. Xác định hình chiếu vuông góc H của S lên mặt phẳng (ABC).

2) Tính bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện SABC theo a.

3) Tính góc phẳng của nhị diện (SAC, BAC).

(Trích đề thi ĐHSP Tp. HCM, năm 1995)

Hướng dẫn giải

1) Tam giác SAC vuông cân tại S nên ta có :

$AC^2 = AS^2 + SC^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

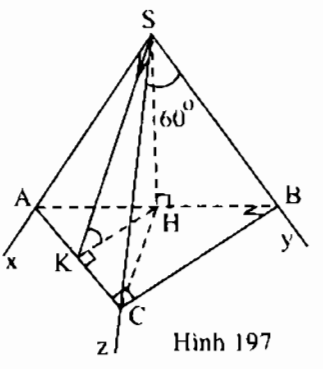
Tam giác SBC là tam giác đều vì có $\widehat{BSC} = 60^\circ$. Do đó :

$$BC = SC = SB = a.$$

Tam giác SAB có : $\widehat{ASB} = 120^\circ$ nên $AB = a\sqrt{3}$. Do đó :

$$BC^2 + CA^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 = AB^2$$

Theo định lí Pitago đảo ta suy ra tam giác ABC vuông tại C vì có $BC^2 + CA^2 = AB^2$.



Hình 197

Vì SA = SB = SC = a nên HA = HB = HC và H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ABC. Như vậy H là trung điểm của đoạn AB.

2) Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện SABC, V là thể tích của tứ diện SABC, $\sum$ là tổng diện tích bốn mặt của tứ diện SABC, ta có :

$$V = \frac{1}{3}\sum .r \Rightarrow r = \frac{3V}{\sum} \qquad (1)$$

Ta hãy tính thể tích V của tứ diện SABC :

$$V = \frac{1}{3}(dt\Delta ABC).SH = \frac{1}{6}AC.BC.SH$$

Với $SH = \frac{a}{2}$ vì $\widehat{ASB} = 120^\circ$, ta có :

$$V = \frac{1}{6}.a\sqrt{2}.a.\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Ta hãy tính tổng diện tích bốn mặt của tứ diện SABC là :

$$\sum = dt\Delta SAB + dt\Delta SBC + dt\Delta SCA + dt\Delta ABC$$

$$= \frac{1}{2}a\sqrt{3}\cdot\frac{a}{2} + \frac{1}{2}a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot a = \frac{1}{2}a^2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$$

Ta có : $r = \frac{3V}{\sum} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4} : \frac{1}{2}a^2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}$.

3) Gọi K là trung điểm của AC thì SK ⊥ AC và HK ⊥ AC (vì SH ⊥ mpABC). Do đó $\widehat{SKH}$ là góc phẳng của nhị diện (SAC, BAC). Ta có :

$$\tan\widehat{SKH} = \frac{SH}{KH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SKH} = 45^\circ$$

Bài 18. Cho hình chóp tam giác SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA ⊥ (ABC) và SA = a. Gọi M là một điểm thay đổi trên cạnh AB. Đặt $\widehat{ACM} = \alpha$, hạ SH vuông góc với đường thẳng CM.

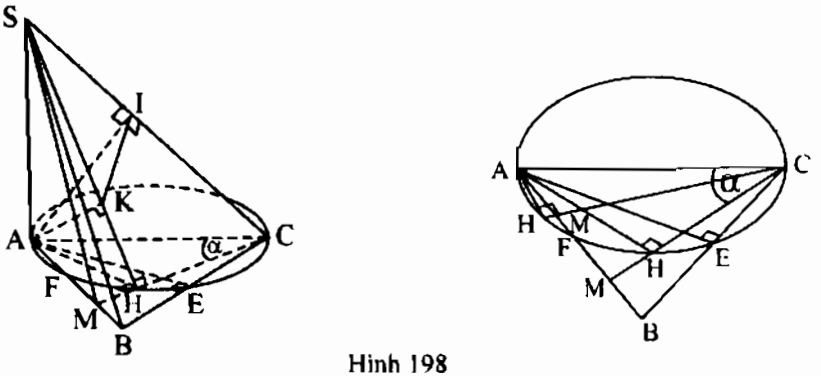
1) Tìm quỹ tích điểm H. Suy ra giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện SAHC.

2) Hạ AI ⊥ SC, AK ⊥ SH. Tính độ dài SK, AK và thể tích tứ diện SAIK.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, Khối A, năm 1999)

Hướng dẫn giải

1) Ta có SA ⊥ (ABC), SH ⊥ CM nên AH ⊥ CM. Vậy H nằm trên đường tròn đường kính AC trong mặt phẳng (ABC). Khi M chạy đến B thì H trùng với trung điểm E của cạnh BC. Khi M trùng với trung điểm F của cạnh AB thì H ≡ M ≡ F. Khi M chạy từ F đến A thì H chạy đến A. Vậy khi M thay đổi từ B đến A thì quỹ tích H là cung EA của đường tròn đường kính AC với E là trung điểm của cạnh BC của tam giác đều ABC.



Hình 198

Gọi thể tích của tứ diện SAHC là V_{SAHC}, ta có :

$$V_{SAHC} = \frac{1}{3}SA.dt\Delta AHC.$$

Vì SA không đổi nên V_{SAHC} lớn nhất khi dtΔAHC lớn nhất. Mà ΔAHC là tam giác nội tiếp trong nửa đường tròn đường kính AC nên nó sẽ có diện tích lớn nhất khi HA = HC.

Vậy : $V_{SAHC\,max} = \frac{1}{3}a\frac{a^2}{4} = \frac{a^3}{12}$

2) Ta có : AH = $a\sin\alpha$;

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2\sin^2\alpha} \Rightarrow AK^2 = \frac{a^2\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}$$

Suy ra : $AK = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$,

$$SK^2 = SA^2 - AK^2 = a^2 - \frac{a^2\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha} = \frac{a^2}{1+\sin^2\alpha}$$

Suy ra : $SK = \dfrac{a}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$

Ta có : $\left.\begin{matrix} AK \perp SH \\ AK \perp CH \end{matrix}\right\} \Rightarrow AK \perp (SHC) \Rightarrow AK \perp KI$

Ta lại có : $\left.\begin{matrix} SC \perp AI \\ SC \perp AK \end{matrix}\right\} \Rightarrow SC \perp (AIK) \Rightarrow SI$ là chiều cao của hình chóp SAIK.

$$V_{SAIK} = \frac{1}{3} SI.dt\Delta AIK = \frac{1}{6} SI.AK.KI,$$

với : $SI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $AK = \dfrac{a\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$;

$$KI^2 = SK^2 - SI^2 = \frac{a^2}{1+\sin^2\alpha} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2\cos^2\alpha}{2(1+\sin^2\alpha)}$$

$$KI = \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{2(1+\sin^2\alpha)}}$$

Vậy : $$V_{SAIK} = \frac{1}{6} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}} \cdot \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{2(1+\sin^2\alpha)}} = \frac{a^3\sin\alpha\cos\alpha}{12(1+\sin^2\alpha)}.$$

Bài 19. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Lấy M, N lần lượt trên các cạnh SB, SD sao cho :

$$\frac{SM}{BM} = \frac{SN}{DN} = 2$$

1) Mặt phẳng (AMN) cắt cạnh SC tại P. Tính tỉ số $\dfrac{SP}{CP}$.

2) Tính thể tích hình chóp SAMPN theo thể tích V của hình chóp SABCD.

(Trích đề thi Đại học Cần Thơ, Khối A, năm 1998)

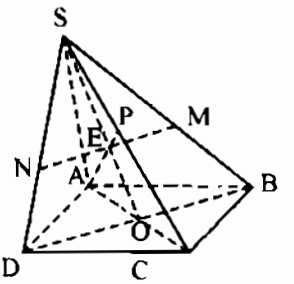
Hướng dẫn giải

1) Gọi O là tâm của hình chữ nhật ABCD.

Ta có : $E = SO \cap MN$.

Vì : $\dfrac{SM}{BM} = \dfrac{SN}{DN}$ nên MN // BD.

Do đó : $\dfrac{SM}{BM} = \dfrac{SN}{DN} = \dfrac{SE}{OE} = 2$



Hình 199

Xét tam giác SAC, ta có SO là đường trung tuyến xuất phát từ S. Mặt khác, $\frac{SE}{OE} = 2$ nên E là trọng tâm của tam giác đó. Do đó AE là đường trung tuyến xuất phát từ A. Vậy P là trung điểm của cạnh SC. Như vậy mặt phẳng (AMN) cắt SC tại P và ta có $\frac{SP}{CP} = 1$.

2) Ta có : $V_{SABCD} = V_{SABD} + V_{SBCD}$, trong đó $V_{SABD} = V_{SBCD}$

$$\frac{V_{SAMN}}{V_{SABD}} = \frac{SA.SM.SN}{SA.SB.SD} = 1 \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{V_{SMNP}}{V_{SBDC}} = \frac{SM.SN.SP}{SB.SD.SC} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{18}$$

Ta suy ra : $\frac{V_{SAMPN}}{V_{SABD}} = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{SAMPN} = \frac{1}{3} V_{SABCD}$.

Vậy thể tích hình chóp SAMPN bằng $\frac{1}{3}$ thể tích V của hình chóp SABCD.

Chú thích : Ta có thể tính cách khác :

$$\frac{V_{SAMPN}}{V_{SABCD}} = \frac{V_{SAMP}}{V_{SABC}} = \frac{SA.SM.SP}{SA.SB.SC} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Bài 20. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC vuông tại A, AB = c, AC = b. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại A, lấy điểm S sao cho SA = h ($h > 0$). M là một điểm di động trên cạnh SB. Gọi I, J lần lượt là các trung điểm của BC và AB.

1) Tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SI và AB.

2) Tính tỉ số giữa thể tích các hình chóp BMIJ và BSCA khi độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường AC và MJ đạt giá trị lớn nhất.

(Trích đề thi Đại học Bách khoa Tp. HCM, năm 1995)

Hướng dẫn giải

1) $AB \perp mp(SAC)$ tại A. SI có hình chiếu vuông góc trên mp(SAC) là SK. Vẽ $AH \perp SK$ tại H ta có K là trung điểm của AC. Dựng HN // AB cắt SI tại N và dựng NQ // AH cắt AB tại Q, ta được QN là đoạn vuông góc chung của AB và SI. Ta có QN = AH. Xét tam giác vuông SAK :

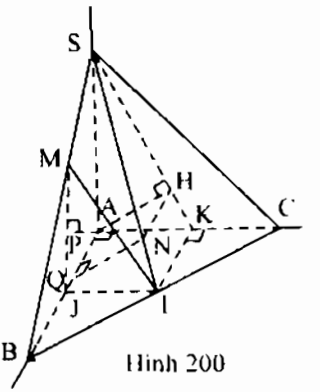
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{4}{b^2} \Rightarrow AH = \frac{bh}{\sqrt{b^2 + 4h^2}}$$

Vậy : $QN = \frac{bh}{\sqrt{b^2 + 4h^2}}$.

Chú ý : Mặt phẳng (SIK) chứa IK // AB nên (SIK) // AB. Ta có $SI \subset (SIK)$ nên độ dài đoạn vuông góc chung là độ dài của một điểm A trên AB tới mp(SIK). Độ dài đó chính là độ dài đoạn AH vì $AH \perp (SIK)$ tại H.

2) Ta có : $\frac{V_{BMIJ}}{V_{BSCA}} = \frac{BM.BI.BJ}{BS.BC.BA} = \frac{BM}{BS} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{BM}{BS}$

Ta tính tỉ số $\frac{BM}{BS}$ khi đoạn vuông góc chung của AC và MJ đạt giá trị lớn nhất.



Hình 200

Vì $AC \perp mp(ASB) \supset MJ$ nên đoạn vuông góc chung của AC và MJ là đoạn AP với P là hình chiếu vuông góc của A lên MJ. Tam giác APJ vuông góc tại P nên AP lớn nhất khi P trùng với J. Khi đó $JP \perp AB$ và M là trung điểm của BS. Do đó ta có : $\frac{BM}{BS} = \frac{1}{2}$ Vậy :

$$\frac{V_{BMIJ}}{V_{BSCA}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{BM}{BS} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Bài 21. Cho ba tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một. Xét tam diện Oxyz, điểm M cố định nằm trong góc tam diện. Một mặt phẳng qua M cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C. Gọi khoảng cách từ M đến các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB) lần lượt là a, b, c.

1) Chứng minh rằng tam giác ABC không phải là tam giác vuông.

2) Chứng minh : $\frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} + \frac{c}{OC} = 1$

3) Tính OA, OB, OC theo a, b, c để tứ diện OABC có thể tích nhỏ nhất.

(Trích đề thi Đại học Y – Dược Tp. HCM, năm 1995)

Hướng dẫn giải

1) Ta có :

$AB^2 = OA^2 + OB^2$

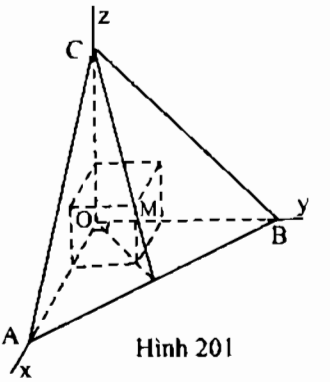
$BC^2 = OB^2 + OC^2$

$CA^2 = OC^2 + OA^2$

Do đó :

$BC^2 + CA^2 = OB^2 + OA^2 + 2OC^2$

$= AB^2 + 2OC^2$



Hình 201

Điểm $O \neq C$ nên :

$$2OC^2 > 0 ; BC^2 + CA^2 \neq AB^2.$$

Do đó tam giác ABC không vuông tại C.

Tương tự ta chứng minh được tam giác ABC không vuông tại A và không vuông tại B.

2) Ta có : $V_{OABC} = V_{MOAB} + V_{MOBC} + V_{MOCA}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} OA.OB.OC = \frac{1}{6} OA.OB.c + \frac{1}{6} OB.OC.a + \frac{1}{6} OC.OA.b$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} + \frac{c}{OC}$$

(bằng cách chia 2 vế cho OA.OB.OC).

3) Ta có $V = \frac{1}{6} OA.OB.OC$. Điểm M cố định tức là các số a, b, c không đổi.

Do đó V nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ AO.AB.OC nhỏ nhất.

Theo câu 2) ta có : $\frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} + \frac{c}{OC} = 1$ nên :

$$1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{OA.OB.OC}} \Leftrightarrow OA.OB.OC \geq 27abc$$

OA.OB.OC nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{a}{OA} = \frac{b}{OB} = \frac{c}{OC} \Leftrightarrow \frac{3a}{OA} = \frac{3b}{OB} = \frac{3c}{OC} = 1$

$$\Leftrightarrow (OA = 3a, OB = 3b, OC = 3c)$$

Vậy : V nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ (OA = 3a, OB = 3b, OC = 3c).

Bài 22. Cho một tam diện vuông đỉnh O. Trên ba cạnh của tam diện ấy lấy ba điểm A, B, C sao cho : AC = 2OB, BC = 2OA.

1) M, N là chân các đường vuông góc kẻ từ O xuống AC và BC. Chứng minh rằng MN vuông góc với OC.

2) Tính $\cos\widehat{MON}$.

3) Gọi D là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh :

$$\frac{\tan^4\widehat{OCD}}{\tan^4\widehat{OCA}} + \frac{MN}{AB} = 1$$

(Trích đề thi Đại học Kinh tế Tp. HCM, năm 1995)

Hướng dẫn giải

1) Đặt OA = a ta có BC = 2a

OB = b ta có AC = 2b

Tam giác AOC vuông tại O nên : $OC^2 = CA^2 - AO^2 = 4b^2 - a^2$ (1)

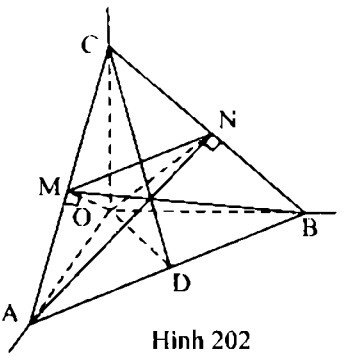
Tam giác BOC vuông tại O nên : $OC^2 = BC^2 - OB^2 = 4a^2 - b^2$ (2)

Do (1) và (2) ta có :

$$4b^2 - a^2 = 4a^2 - b^2 \text{ hay } a = b.$$

Vậy tam giác ABC cân tại C và tam giác AOB cân tại O.

Tam giác CAB cân tại C có AN và BN là các đường cao phát xuất từ đây (theo định lí ba đường vuông góc) nên MN song song AB mà OC ⊥ AB nên OC ⊥ MN.



Hình 202

2) Tam giác AOC vuông tại O với OM là đường cao có OA = a, $OC^2 = 4b^2 - a^2 = 3a^2$ do đó $OC = a\sqrt{3}$, AC = 2OB = 2a nên từ OM.AC = OC.OA ta có $OM = \frac{a.a\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác BOC vuông tại O với ON là đường cao, OB = a, BC = 2a nên từ ON.BC = OB.OC ta có $ON = \frac{a.a\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Tam giác CAB cân tại C có MN // AB nên :

$$\frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CA} = \frac{CM.CA}{CA^2} = \frac{CO^2}{CA^2}$$

$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = a\sqrt{2}$; $CA^2 = OA^2 + OC^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2$.

Do đó : $MN = \dfrac{AB.CO^2}{CA^2} = \dfrac{a\sqrt{2}.3a^2}{4a^2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$

Xét tam giác OMN :

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM.ON\cos\widehat{MON}$$

$$\frac{18a^2}{16} = \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - 2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\widehat{MON}$$

Suy ra : $\cos\widehat{MON} = \dfrac{1}{4}$.

3) Ta có : $\tan\widehat{OCD} = \dfrac{OD}{OC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} : a\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

$$\tan\widehat{OCA} = \frac{OA}{OC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},\ MN = \frac{3a\sqrt{2}}{4} ;\ AB = a\sqrt{2}$$

Vậy : $\dfrac{\tan^4\widehat{OCD}}{\tan^4\widehat{OCA}} + \dfrac{MN}{AB} = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{6} : \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 + \left(\dfrac{3a\sqrt{2}}{4} : a\sqrt{2}\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$

Bài 23. Cho trên mặt phẳng (α) góc $\widehat{xOy}$. Đoạn SO = a vuông góc với mặt phẳng (α). Các điểm M, N chuyển động trên Ox, Oy sao cho ta luôn có : OM + ON = a.

1) Xác định giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện SOMN.

2) Tìm quỹ tích tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SOMN. Chứng minh rằng khi tứ diện có thể tích lớn nhất thì nó lại có bán kính mặt cầu ngoại tiếp nhỏ nhất.

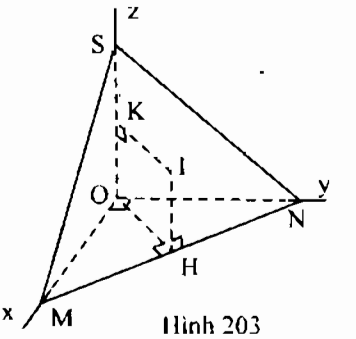
(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, Tp. HCM, năm 1995)

Hướng dẫn giải

1) Ta có :

$$V_{SOMN} = \frac{1}{6}OS.OM.ON = \frac{1}{6}a.OM.ON$$

Do đó V_{SOMN} lớn nhất khi và chỉ khi OM.ON lớn nhất mà OM + ON = a không đổi nên OM.ON lớn nhất khi và chỉ khi $OM = ON = \dfrac{a}{2}$. Vậy : V_{SOMN} lớn nhất $= \dfrac{1}{6}a\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3}{24}$.



Hình 203

2) Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SOMN cách đều các đỉnh của tứ diện nên là giao điểm của trục đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN và mặt phẳng trung trực của đoạn OS. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của MN và OS. Ta tìm quỹ tích của H rồi suy ra quỹ tích của I.

Qua H ta vẽ đường thẳng cắt Ox tại M_0, cắt Oy tại N_0 sao cho tam giác OM_0N_0 vuông cân tại O. Ta chứng minh M_0, N_0 cố định. Qua N vẽ NN' // Ox với $N' \in M_0N_0$. Tam giác N_0NN' vuông cân tại N nên :

$$NN' = NN_0 \qquad (1)$$

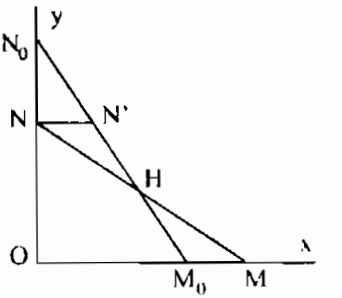
Tam giác HNN' bằng tam giác HMM_0 (g.g.c) nên :

$$NN' = M_0M \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra : $MM_0 = NN_0$. Do đó :

$$OM_0 + ON_0 = (OM - M_0M) + (ON + NN_0) = OM + ON = a.$$

Ta suy ra : $OM_0 = ON_0 = \frac{a}{2}$ nên M_0, N_0 cố định. Điểm $H \in M_0N_0$ cố định. Vì $\vec{HI} = \vec{OK}$ nên ta suy ra quỹ tích I là đoạn thẳng M_1N_1 ảnh của M_0N_0 qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{OK}$.



Hình 204

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SOMN.

Ta có : $R = IM \Rightarrow R^2 = \frac{MN^2}{4} + \frac{a^2}{4}$ (3)

Mà : $MN^2 = OM^2 + ON^2 = (OM + ON)^2 - 2OM.ON$

$= a^2 - 2OM.ON$ (4)

Theo câu 1) : V_{SOMN} lớn nhất $\Leftrightarrow$ OM.ON lớn nhất

$\Leftrightarrow$ MN^2 nhỏ nhất theo (4).

Vì $R^2 = \frac{MN^2}{4} + \frac{a^2}{4}$ nên MN^2 nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ R^2 nhỏ nhất.

Vậy : V_{SOMN} lớn nhất $\Leftrightarrow$ R nhỏ nhất.

Bài 24. Cho tam giác đều OAB có cạnh AB = a > 0. Trên đường thẳng d đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy một điểm M với OM = x. Gọi E, F lần lượt là các hình chiếu vuông góc của A lên MB và OB. Đường thẳng EF cắt d tại N.

1) Chứng minh rằng : AN ⊥ BM.

2) Xác định x để thể tích tứ diện ABMN nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó.

(Trích đề thi Đại học Tổng hợp Tp. HCM, năm 1995)

Hướng dẫn giải

1) Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} MO \perp mp(OAB) \Rightarrow MO \perp AF \\ \text{Mặt khác :} \quad OB \perp AF \end{array}\right\} \Rightarrow AF \perp mp(OBM)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Suy ra :} \quad AF \perp MB \ (1) \\ \text{Ta lại có :} \ AE \perp MB \ (2) \end{array}\right\} \Rightarrow MB \perp (AEF)$$

Suy ra : MB ⊥ AN vì AN ⊂ mp(AEF).

2) Gọi V_{ABMN} thì thể tích tứ diện ABMN :

$$V_{ABMN} = V_{MOAB} + V_{NOAB}$$

$$= \frac{1}{3}(dt\Delta OAB).OM + \frac{1}{3}(dt\Delta OAB).ON = \frac{1}{3}(dt\Delta OAB).(OM + ON)$$

Do đó : V_{ABMN} nhỏ nhất ⇔ OM + ON nhỏ nhất

Mà : OM.ON = OF.OB (do hai tam giác vuông OMB và OFN đồng dạng).

= Không đổi vì O, F, B đều cố định.

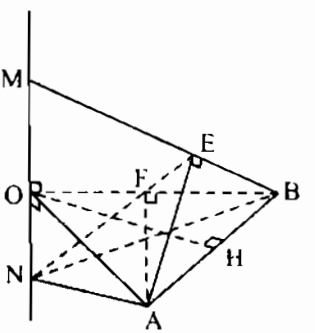
Ta có : $OM + ON \geq \sqrt[2]{OM.ON}$

Dấu bằng "=" xảy ra khi và chỉ khi OM = ON nên OM + ON nhỏ nhất khi và chỉ khi OM.ON = x.

Vì : OM.ON = OF.OB, nên :

$$x^2 = \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^2}{2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

(vì $OF = \frac{a}{2}$ và OB = a)



Hình 205

Vậy M thuộc d sao cho $OM = x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ thì

V_{ABMN} nhỏ nhất. Khi đó :

$$V_{ABMN} = \frac{1}{3}(dt\Delta OAB).(OM + ON) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3}{12}\sqrt{6}$$

Bài 25. Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh a có tâm là O. Trên các nửa đường thẳng Ax, Cy vuông góc với (P) và ở về cùng một phía đối với (P) ta lần lượt lấy hai điểm M, N. Đặt AM = x, CN = y.

1) Tính độ dài MN. Từ đó chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác OMN vuông tại O là $xy = \frac{a^2}{2}$.

2) Giả sử M, N thay đổi sao cho tam giác OMN vuông tại O. Tính thể tích tứ diện BDMN. Xác định x, y để thể tích tứ diện này bằng $\frac{a^3}{4}$.

(Trích đề thi ĐHQG, Tp. HCM, Khối D, năm 1999)

Hướng dẫn giải

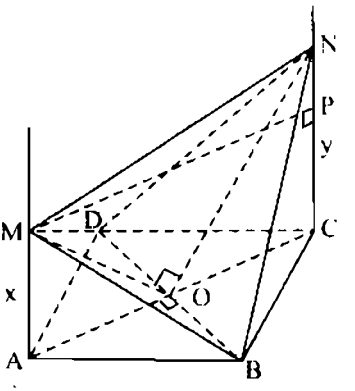
1) Trong mp(AM, CN) kẻ MP ⊥ CN ta có tam giác MNP vuông tại P. Do đó :

$$MN^2 = NP^2 + MP^2$$

$$MN^2 = AC^2 + (CN - CP)^2$$

$$MN^2 = 2a^2 + (y - x)^2$$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{2a^2 + (x - y)^2}$$



Hình 206

Cần và đủ để tam giác OMN vuông tại O là :

$$MN^2 = OM^2 + ON^2$$

$$\Leftrightarrow MN^2 = MA^2 + AO^2 + OC^2 + CN^2$$

$$\Leftrightarrow MN^2 = x^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + y^2$$

$$= x^2 + y^2 + a^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + (x - y)^2 = x^2 + y^2 + a^2 \Leftrightarrow xy = \frac{a^2}{2}.$$

2) $\left.\begin{matrix} BD \perp AC \\ BD \perp AM \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (ACM) \Rightarrow BD \perp MO$

Nếu MO ⊥ ON thì MO ⊥ (ONB), tức MO là một đường cao của tứ diện BDMN. Do đó :

$$V_{BDMN} = \frac{1}{3}MO.(dt\Delta BDN)$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^2}{2} + x^2} \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{2} + y^2} = \frac{a\sqrt{2}}{6}\sqrt{\left(\frac{a^2}{2} + x^2\right)\left(\frac{a^2}{2} + y^2\right)}$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{6}\sqrt{\frac{a^4}{4} + \frac{a^2}{2}(x^2 + y^2) + x^2y^2}$$

Theo câu 1) ta có $xy = \frac{a^2}{2}$ nên

$$\frac{a^4}{4} + x^2y^2 = \frac{a^2}{2} \cdot xy + \frac{a^2}{2}xy = a^2xy$$

Thay vào biểu thức trên ta tính được thể tích V_{BDMN} của tứ diện BDMN là :

$$V_{BDMN} = \frac{a\sqrt{2}}{6}\sqrt{\frac{a^2}{2}(a+y)^2} = \frac{a^2(x+y)}{6}$$

$$V_{BDMN} = \frac{a^3}{4} \Leftrightarrow \frac{a^2}{6}(x+y) = \frac{a^3}{4} \Leftrightarrow x + y = \frac{3a}{2}$$

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = \frac{3a}{2} = S \\ xy = \frac{a^2}{2} = P \end{cases} \Rightarrow X^2 - SX + P = 0 \text{ (định lí Viet đảo)}$$

Do đó x, y là nghiệm của phương trình :

$$X^2 - \frac{3a}{2}X + \frac{a^2}{2} = 0$$

Giải ra ta có nghiệm x, y là : $\left[\begin{array}{l} (x\,;\,y) = \left(a\,;\,\frac{a}{2}\right) \\ (x\,;\,y) = \left(\frac{a}{2}\,;\,a\right) \end{array}\right.$.

Bài 26. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, AC = $a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A'. ABC và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', B'C'.

(Trích đề thi tuyển sinh Đại học Khối A, năm 2008)

Hướng dẫn giải

• Gọi H là trung điểm của BC. Theo giả thiết, ta có $A'H \perp (ABC)$. Tam giác vuông ABC cho ta :

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$

$\Rightarrow AH = \frac{1}{2}BC = a$

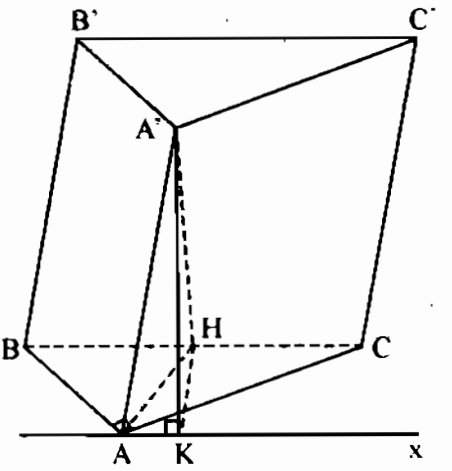
Tam giác vuông AHA′ cho ta :

$A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2}$

$= \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Vậy $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}A'H.S_{ABC}$

$= \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{1}{2}.a.a\sqrt{3} = \frac{a^3}{2}$



Hình 207

• Kẻ Ax // BC. Ta có góc giữa hai đường thẳng AA′ và B′C′ chính là góc giữa hai đường thẳng AA′ và Ax hay là $\widehat{A'Ax}$. Gọi K là hình chiếu của A′ xuống Ax. Vì $A'H \perp BC$ nên $HK \perp Ax$ hay ΔAHK vuông tại K.

ΔABH có ba cạnh đều bằng a nên là tam giác đều

$\Rightarrow \widehat{HAx} = \widehat{BHA} = 60^0 \Rightarrow \Delta AHK$ là nửa tam giác đều $\Rightarrow AK = \frac{1}{2}AH = \frac{a}{2}$

Vậy cosin của góc giữa hai đường thẳng AA′, B′C′ là

$\cos\widehat{A'AK} = \frac{AK}{AA'} = \frac{\frac{a}{2}}{2a} = \frac{1}{4}$.

Bài 27. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện CMNP.

(Trích đề thi tuyển sinh Đại học Khối A, năm 2007)

Hướng dẫn giải

• Gọi H là trung điểm của AD. Do ΔSAD đều nên $SH \perp AD$. Vì $(SAD) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp BP$ (1)

Trong hình vuông ABCD có $\Delta CDH = \Delta BCP \Rightarrow \widehat{CHD} = \widehat{CPB} \Rightarrow CH \perp BP$ (2).

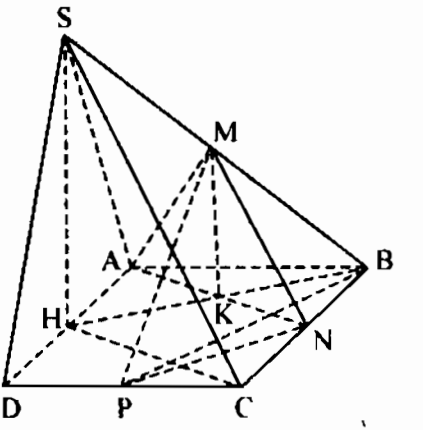
Từ (1) và (2) suy ra $BP \perp (SCH)$

Lại có MN // SC và CH // AN nên $mp(SHC) // (MAN) \Rightarrow BP \perp (MAN)$

Vậy $BP \perp AM$

• Gọi K là giao điểm của AN và BH. Ta có MK // SH và

$$MK = \frac{1}{2}SH \Rightarrow MK \perp (ABCD)$$



Hình 208

Vậy $V_{MPCN} = \frac{1}{3}MK.S_{CPN}$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}SH.\frac{1}{2}CP.CN$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}.$$

Bài 28. Cho đường tròn tâm O bán kính R. Xét các hình chóp SABCD có SA vuông góc với mặt phẳng đáy (S và A cố định), SA = h cho trước. đáy ABCD là một tứ giác tuỳ ý nội tiếp đường tròn đã cho mà các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau.

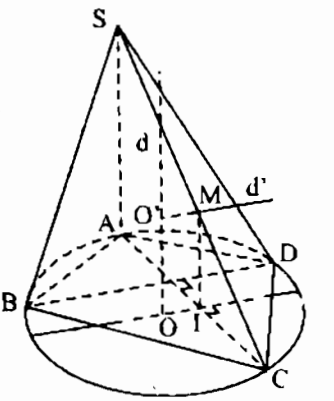
1) Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp (đi qua năm đỉnh của hình chóp).

2) Hỏi đáy ABCD là hình gì để thể tích hình chóp đạt giá trị lớn nhất ?

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, khối B, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Trong mặt phẳng chứa đường tròn tâm O ngoại tiếp tứ giác ABCD ta kẻ đường kính qua O vuông góc với dây cung AC tại I. Ta có IA = IC và OI // BD. Gọi O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta có O'A = O'B = O'C = O'D = O'S. Điểm O' phải nằm trên trục d của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD. Ta có d ⊥ mp(ABCD) tại O. Gọi M là trung điểm của SC. Ta có MI ⊥ mp(ABCD) tại I vì MI // SA. Từ M kẻ đường thẳng d' ⊥ mp(SAC)



Hình 209

tại M thì d' cắt d tại O'. Thực vậy, vì BD ⊥ (SAC) và OI ⊥ (SAC) nên d' // OI, do đó d' cắt d tại O'. Ta có O'C = O'S nên O'C là bán kính R' của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABCD.

$$R' = O'C = \sqrt{OO'^2 + OC^2} = \sqrt{MI^2 + R^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + R^2} = \frac{\sqrt{h^2 + 4R^2}}{2}$$

2) Gọi $V_{SABCD} = \frac{1}{3}SA.dt(ABCD)$ với SA không đổi.

Do đó V_{SABCD} lớn nhất $\Leftrightarrow$ dt(ABCD) lớn nhất.

Ta có $dt(ABCD) = \frac{1}{2}AC.BD$ trong đó AC và BD là hai dây cung vuông góc với nhau. Vậy AC.BD lớn nhất khi và chỉ khi AC = BD = 2R nghĩa là tứ giác ABCD là một hình vuông.

Bài 29. Cho tứ diện SABC có các góc phẳng ở đỉnh S vuông.

1) Chứng minh rằng $\sqrt{3}S_{ABC} \geq S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SAC}$.

2) Biết rằng SA = a, SB + SC = k. Đặt SB = x. Tính thể tích tứ diện SABC theo a, k, x và xác định SB, SC để thể tích tứ diện SABC lớn nhất.

(Trích đề thi ĐHQG Tp. HCM, Khối A, năm 1996)

Hướng dẫn giải

1) Trong mặt phẳng (ABC) vẽ AI ⊥ BC tại I. Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SI$$

$$dt(ABC) = \frac{1}{2}BC.AI \; ; \; dt(HBC) = \frac{1}{2}BC.HI$$

Suy ra :

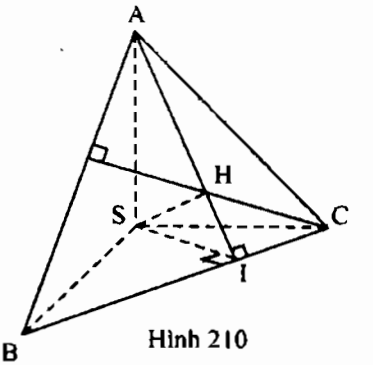
$$dt(ABC).dt(HBC) = \frac{1}{4}BC^2.AI.HI \quad (1)$$

$$[dt(SBC)]^2 = \frac{1}{4}BC^2.SI^2 \quad (2)$$

Trong tam giác vuông SAI ta có : $SI^2 = AI.HI$.

Từ (1) và (2) ta suy ra :

$$[dt(SBC)]^2 = dt(ABC).dt(HBC) \quad (3)$$



Hình 210

Tương tự : $[dt(SAC)]^2 = dt(ABC).dt(HAC)$ (4)

$[dt(SAB)]^2 = dt(ABC).dt(HAB)$ (5)

Từ (3), (4), (5) ta có :

$$[dt(SBC)]^2 + [dt(SAC)]^2 + [dt(SAB)]^2$$

$$= dt(ABC)[dt(HBC) + dt(HAC) + dt(HAB)]$$

Suy ra : $[dt(SBC)]^2 + [dt(SAC)]^2 + [dt(SAB)]^2 = [dt(ABC)]^2$ (6)

Mặt khác, ta có :

$$[dt(SAB) + dt(SAC) + dt(SBC)]^2$$

$$= [dt(SAB)]^2 + [dt(SAC)]^2 + [dt(SBC)]^2$$

$$+2[dt(SAB).dt(SAC) + dt(SAB).dt(SBC) + dt(SAC).dt(SBC)]$$

$$[dt(SAB) + dt(SAC) + dt(SBC)]^2$$

$$\le [dt(SAB)]^2 + [dt(SAC)]^2 + [dt(SBC)]^2$$

$$+ 2\{[dt(SAB)]^2 + [dt(SAC)]^2 + [dt(SBC)]^2\}$$

Từ đẳng thức (6) ta suy ra :

$$[dt(SAB) + dt(SAC) + dt(SBC)]^2 \le 3[dt(ABC)]^2$$

Hay : $dt(SAB) + dt(SAC) + dt(SBC) \le \sqrt{3}\, dt(ABC)$.

2) Thể tích tứ diện : $V_{SABC} = \frac{1}{6}SA.SB.SC = \frac{1}{6}ax(k - x)$

Ta biết rằng tích $x(k - x)$ lớn nhất khi : $x = k - x \Leftrightarrow x = \frac{k}{2}$

Vậy thể tích hình tứ diện SABC lớn nhất khi : $SB = SC = \frac{k}{2}$.

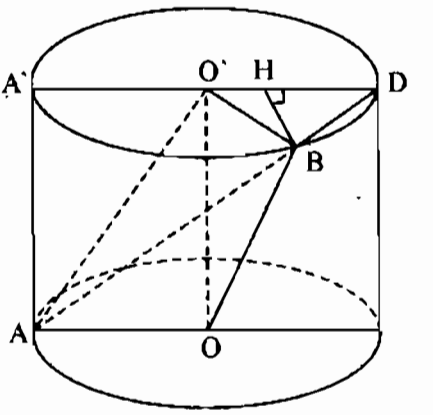
Bài 30. Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B sao cho $AB = 2a$. Tính thể tích của khối tứ diện OO'AB.

(Trích đề thi tuyển sinh Đại học Khối A, năm 2006)

Hướng dẫn giải

Kẻ đường sinh AA'. Gọi D là điểm đối xứng với A' qua O' và H là hình chiếu của B trên đường thẳng A'D. Do $BH \perp A'D$ và $BH \perp AA'$ nên $BH \perp (AOO'A')$, suy ra

$$V_{OO'AB} = \frac{1}{3} BH.S_{AOO'}$$



Hình 211

Ta có $A'B = \sqrt{AB^2 - AA'^2}$

$= \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$ và tam giác vuông A'BD cho : $BD = \sqrt{A'D^2 - A'B^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$

Từ đó, ta có $\Delta BO'D$ đều $\Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V_{OO'AB} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}OA.OO' = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}.a.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Bài 31. Cho hai đường thẳng Δ, Δ' chéo nhau nhận AA' làm đường vuông góc chung. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với Δ' và d là hình chiếu của Δ lên mặt phẳng (P). Đặt AA' = a, góc nhọn giữa Δ và d là α. Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) cắt Δ và Δ' lần lượt tại M và M'. Gọi M_1 là hình chiếu của M lên mặt phẳng (P).

1) Chứng minh 5 điểm A, A', M, M', M_1 cùng nằm trên mặt cầu (S). Xác định tâm O của (S). Tính bán kính của (S) theo a, α và khoảng cách x giữa mp(P) và mp(Q).

2) Khi x thay đổi, hãy tìm quỹ tích của O, tâm của mặt cầu (S). Chứng minh rằng khi (S) thay đổi, mặt cầu (S) luôn luôn đi qua một đường tròn cố định.

(Trích đề thi Đại học Kinh tế Tp. HCM, năm 1994)

Hướng dẫn giải

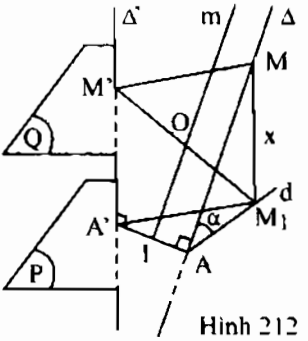
1) Ta có $AA' \subset (P)$ vì (P) qua A và vuông góc với Δ'. Vì $MA \perp AA'$ nên $M_1A \perp AA'$. Do đó $M_1A \perp mp(AA'M')$

$M_1A \perp M'A$ nên điểm A thuộc mặt cầu đường kính $M'M_1$.

$M'A' \perp mp(P) \Rightarrow M'A' \perp A'M_1$ nên điểm A' thuộc mặt cầu đường kính M'M.

Vì $M_1M \perp (Q) \supset MM'$ nên $M_1M \perp MM'$

Như vậy 5 điểm A, A', M, M', M_1 cùng thuộc mặt cầu (S) đường kính $M'M_1$. Tâm O của (S) là trung điểm của $M'M_1$.



Hình 212

Bán kính R của (S) bằng $\frac{M'M_1}{2}$, mà :

$$M'M_1^2 = M'A'^2 + A'A^2 + AM_1^2 = x^2 + a^2 + x^2.\cot^2\alpha$$

Vậy : $R = \sqrt{a^2 + x^2(1 + \cot^2\alpha)}$

2) Hình tứ giác $A'M'MM_1$ là hình chữ nhật nên O cũng là trung điểm của A'M. Do đó khi mặt phẳng (Q) thay đổi, điểm O thuộc đường thẳng lm đi qua trung điểm I của đoạn AA' và song song với Δ.

3) Vì mặt cầu (S) có tâm O thuộc đường thẳng lm và đi qua A, A' cố định nên mặt cầu S luôn luôn chứa đường tròn tâm I trung điểm của AA', đường tròn này nhận lm làm trục và nằm trong mặt phẳng (R) chứa AA' và vuông góc với trục lm tại I. Đường tròn này cố định vì có đường kính cố định và nằm trong mặt phẳng (R) cố định.

Bài 32. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có BB' = a, góc giữa đường thẳng BB' và mp(ABC) bằng 60^0 ; tam giác AB (vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện A'ABC theo a.

(Trích đề thi tuyển sinh Đại học Khối B, năm 2009)

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Theo giả thiết, ta có $B'E \perp (ABC)$ và $\widehat{B'BG}$ là góc giữa đường thẳng BB' và $mp(ABC) \Rightarrow \widehat{B'BG} = 60^0$

ΔBB'G vuông ở G và có $\widehat{B'BG} = 60^0$; BB' = a nên $BG = \frac{1}{2}BB' = \frac{a}{2}$ và

$B'G = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

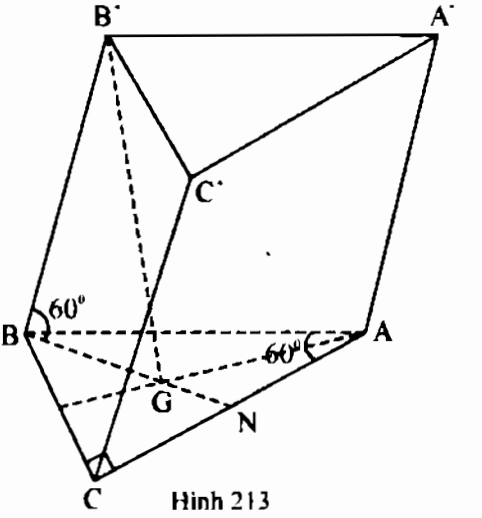
ΔABC vuông ở C và có $\widehat{A} = 60^0$ nên nếu đặt AC = x thì Ba = 2x và $BC = x\sqrt{3}$. Áp dụng định lí đường trung tuyến trong ΔABC có :

$BA^2 + BC^2 = 2BN^2 + \frac{CA^2}{2}$ (Với N là trung điểm của AC và ta cũng có $BN = \frac{3}{2}BG = \frac{3a}{4}$)

$\Leftrightarrow (2x)^2 + \left(x\sqrt{3}\right)^2 = 2.\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{2}$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{9a^2}{52} \Rightarrow x = \frac{3a}{2\sqrt{13}}$

$\Rightarrow BC = \frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$; $AC = \frac{3a}{2\sqrt{13}}$



Hình 213

Vậy $V_{A'ABC} = \frac{1}{3}.B'G.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}B'G.\frac{1}{2}BC.CA$

$= \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}.\frac{3a}{2\sqrt{13}} = \frac{9a^3}{208}.$

Bài 33. Cho hình chóp SABC có SA là đường cao và đáy là tam giác ABC vuông tại B.

Cho $\widehat{BSC} = 45^0$. Gọi $\widehat{ASB} = \alpha$, tìm α để góc nhị diện (SC) bằng 60^0.

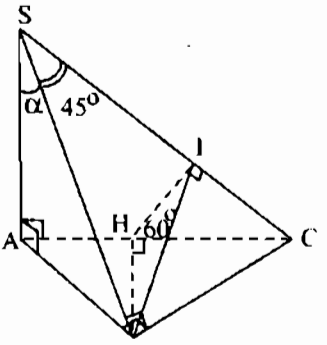
(Trích đề thi Đại học Y khoa Hà Nội, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Ta có : $\left.\begin{array}{l} SA \perp mp(ABC) \\ AB \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow SB \perp BC$ theo định lí ba đường vuông góc.

Tam giác SBC vuông cân tại B, vì góc $\widehat{BSC} = 45^0$. Đặt BC = a, ta có $SC = a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của SC ta có $BI \perp SC$ và $BI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Trong mặt phẳng (ABC) gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên AC, ta có $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$.

Mặt khác, ta có BI ⊥ SC nên ta suy ra SC ⊥ (BHI). Vậy $\widehat{HIB}$ là góc của nhị diện (SC). Theo giả thiết $\widehat{HIB} = 60^0$ và $\widehat{BHI} = 90^0$ nên $HI = \frac{BI}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.



Hình 214

Xét tam giác vuông HIC, ta có :

$$HC^2 = HI^2 + IC^2 = \frac{2a^2}{16} + \frac{2a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$$

Vậy : $HC = \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$

Ta có : $\sin\widehat{ICH} = \frac{HI}{HC} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \times \frac{2\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$SA = SC \sin\widehat{ICH} = a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.$$

$$\cos = \frac{SA}{SB} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5}} : a = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

Vậy : α là góc có $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$

Bài 34. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh a và một điểm M trên cạnh AB, AM = x, 0 < x < a. Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm M và chứa đường chéo A'C' của hình vuông A'B'C'D'.

1) Tính diện tích thiết diện cắt hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (P).

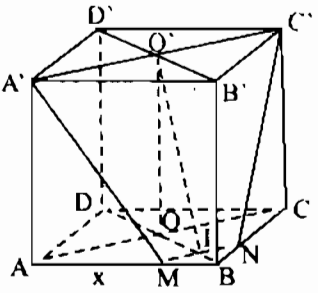
2) Mặt phẳng (P) chia hình lập phương thành hai khối đa diện, hãy tìm x để thể tích của một trong hai khối đa diện đó gấp đôi thể tích khối đa diện kia.

(Trích đề thi Học viện Ngân hàng, năm 1999)

Hướng dẫn giải

1) Mặt phẳng (P) cắt mặt ABCD theo giao tuyến MN // A'C'. Với N ∈ BC. Thiết diện là hình thang A'C'NM có A'M = C'N. Gọi I là trung điểm của đoạn MN và O' là tâm của hình vuông A'B'C'D' ta có OI là đường cao của hình thang A'C'NM. Ta có :

$$MN = BM\sqrt{2} = (a - x)\sqrt{2}$$



Hình 215

$$OI = x\sqrt{2}.$$

Do đó : $O'I = \sqrt{OO'^2 + OI^2} = \sqrt{a^2 + \frac{x^2}{2}}$

Gọi S là diện tích của hình thiết diện ta có :

$$S = \frac{1}{2}(A'C' + MN)O'I$$

$$= \frac{1}{2}\left[a\sqrt{2} + (a - x)\sqrt{2}\right]\sqrt{a^2 + \frac{x^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(2a - x)\sqrt{a^2 + \frac{x^2}{2}}.$$

2) Mặt phẳng (P) chia hình lập phương thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện nhỏ là hình chóp cụt tam giác có đáy nhỏ là tam giác BMN và đáy lớn là tam giác B'A'C'. Gọi V_1 là thể tích khối chóp cụt có chiều cao h = a, gọi S là diện tích tam giác B'A'C', ta có $S = \frac{a^2}{2}$ và S' là diện tích tam giác BMN, ta có $S' = \frac{(a - x)^2}{2}$. Từ đó :

$$V_1 = \frac{1}{3}h\left(S + S' + \sqrt{SS'}\right)$$

$$= \frac{1}{3}a\left[\frac{a}{2} + \frac{(a-x)}{2} + \sqrt{\frac{a^2(a-x)^2}{4}}\right] = \frac{a}{6}(x^2 - 3ax + 3a^2).$$

Theo yêu cầu của đề ra thì $V_1 = \frac{1}{3}$ thể tích khối lập phương nghĩa là bằng $\frac{a^3}{3}$:

$$\frac{a}{6}(x^2 - 3ax + 3a^2) = \frac{a^3}{3} \Leftrightarrow x = a\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

Chú thích : Có thể phân tích khối chóp cụt thành hai khối chóp A'.BMN và A'.BB'C'N để tính thể tích.

Bài 35. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, $AD = a\sqrt{2}$, SA = a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC ; I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB). Tính thể tích khối tứ diện ANIB.

(Trích đề thi tuyển sinh Đại học Khối B, năm 2006)

Hướng dẫn giải

• Hình chữ nhật ABCD có AB = a ;

$AD = a\sqrt{2}$ nên $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{BA}{BC}$

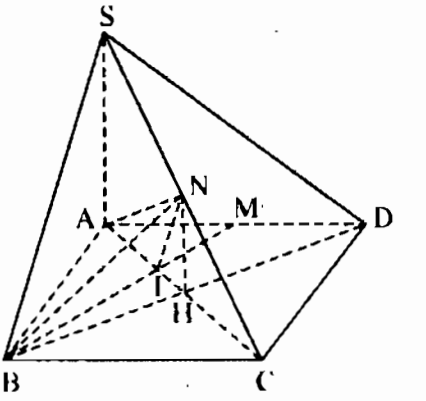
$\Rightarrow \Delta ABM \backsim \Delta BCA \Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{ABM} + \widehat{BAC} = \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{AIB} = 90^0$ hay $BM \perp AC$ (1)

Theo giả thiết, ta có :

$SA \perp (ABCD)$ nên $BM \perp SA$ (2)



Hình 216

(1) và (2) cho ta : $BM \perp (SAC)$, mà $BM \subset (SMB)$ nên $(SMB) \perp (SAC)$

• Gọi $H = AC \cap BD$. Ta có H là trung điểm của $AC \Rightarrow NH$ là đường trung bình của $\Delta SAC \Rightarrow NH // SA \Rightarrow NH \perp (ABCD)$

Do đó $V_{ANIB} = \frac{1}{3} NH.S_{AIB}$

Ta có $AI.BM = AM.AB \Rightarrow AI = \frac{AM.AB}{BM} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$AB^2 = BI.BM \Rightarrow BI = \frac{AB^2}{BM} = \frac{a^2}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{6}}$

Vậy $V_{ANIB} = \frac{1}{3} NH.\frac{1}{2} AI.IB = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{1}{2}.\frac{a}{\sqrt{3}}.\frac{2a}{\sqrt{6}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Bài 36. Trong mặt phẳng (P) cho một đường thẳng d và điểm A ngoài d. Một góc $\widehat{xAy}$ di động quanh A, cắt d tại B và C. Trên đường thẳng qua A và vuông góc với (P) lấy một điểm S. Gọi H và K là các hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC.

1) Chứng minh A, B, C, H, K thuộc một mặt cầu.

2) Tính bán kính mặt cầu trên biết AB = 2, AC = 3, $\widehat{BAC} = 60^0$.

3) Giả sử tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện ABCHK luôn luôn đi qua một đường tròn cố định khi S thay đổi.

(Trích đề thi trường Đại học Y – Dược Tp. Hồ Chí Minh, năm 1994)

Hướng dẫn giải

1) Gọi AA' là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có :

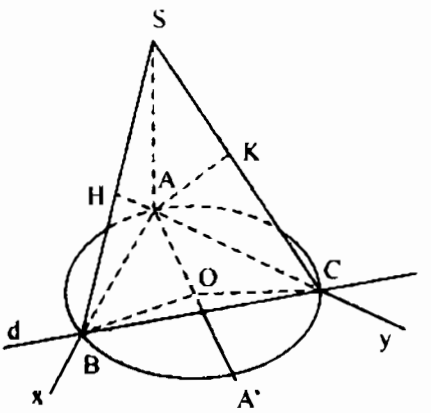
$$\left.\begin{array}{l} A'B \perp AB \\ A'B \perp SB \end{array}\right\} \Rightarrow A'B \perp mp(SAB) \Rightarrow (AA'B) \perp (SAB)$$

Mà AH vuông góc với giao tuyến SB

$\Rightarrow AH \perp mp(SBA') \Rightarrow AH \perp A'B$

Hay $\widehat{AHA'} = 90^o$.

Chứng minh tương tự, ta có $\widehat{AKA'} = 90^o$. Vậy năm điểm A, B, C, H, K cùng thuộc mặt cầu đường kính AA' tâm O.



Hình 217

2) Vì $\widehat{BAC} = 60^o$ nên $\widehat{BOC} = 120^o$.

Xét tam giác ABC ta có :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos 60^o$$

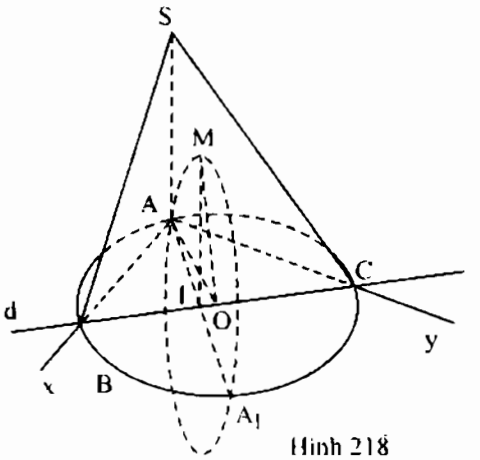
$$= 4 + 9 - 2.2.3.\frac{1}{2} = 7.$$

Xét tam giác BOC ta có : $BC^2 = 2R^2 - 2R^2\cos 120^o = 3R^2$

Vậy : $3R^2 = 7 \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$

3) Vì $\widehat{BAC} = 90^o$ nên mặt cầu đi qua A, B, C, H, K có tâm O thuộc d (O thay đổi trên d). Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua d thì A_1 cố định và mặt phẳng (ASA_1) cố định vì đường thẳng AS cố định. Gọi M là một điểm chung của mặt cầu tâm O và mặt phẳng (SAA_1) ta có OM = OA vì điểm A cũng thuộc mặt cầu tâm O. Điểm $M \in mp(SAA_1)$ nên $IM \perp IO$ với I là trung điểm của AA_1. Do đó :

$$IM^2 = OM^2 - OI^2 = OA^2 - OI^2 = IA^2.$$



Hình 218

Vậy IM = IA không đổi và điểm M thuộc đường tròn tâm I, bán kính IA và nằm trong mặt phẳng ASA_1. Đường tròn này cố định. Vậy khi góc $\widehat{xAy} = 90^0$ quay quanh A mặt cầu (O) luôn luôn đi qua đường tròn tâm I, bán kính IA, nằm trong mặt phẳng (ASA_1).

Bài 37. Cho tứ diện ABCD có AB = BC = AD = CA = DB = $a\sqrt{2}$ và CD = 2a.

1) Chứng minh rằng AB vuông góc với CD. Hãy xác định đường vuông góc chung của AB và CD.

2) Tính thể tích tứ diện ABCD.

3) Xác định tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

4) Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm I trên mặt phẳng (ABC). Chứng minh H là trực tâm của tam giác ABC.

(Trích đề thi ĐHSP Quy Nhơn, năm 1997)

Hướng dẫn giải

1) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của CD và AB. Vì :

$$\left.\begin{array}{l} BC = CA \text{ nên } CK \perp AB \\ BD = AD \text{ nên } DK \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (CDK)$$

$$\Rightarrow AB \perp CD \Rightarrow AB \perp IK.$$

Vì KC = KD nên KI ⊥ CD.

Vậy IK là đường vuông góc chung của AB và CD.

2) Gọi V_{ABCD} là thể tích tứ diện ABCD.

$$V_{ABCD} = 2V_{AIBD} = 2\frac{1}{3}DI.dt(\Delta ABI),$$

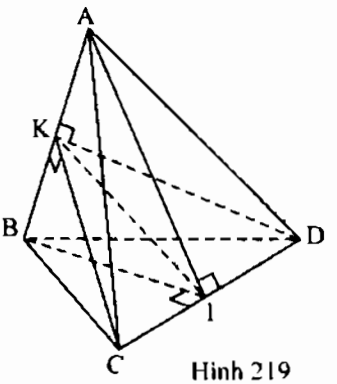
$IA^2 = AD^2 - DI^2 = 2a^2 - a^2 = a^2$.

$$dt(\Delta ABI) = \frac{1}{2}AB.KI$$

$$= \frac{1}{2}AB\sqrt{IA^2 - AK^2}$$

$$= \frac{1}{2}a\sqrt{2}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a^2}{2}$$

Vậy : $V_{ABCD} = \frac{2}{3}a \cdot \frac{a^2}{3} = \frac{a^3}{3}$.



Hình 219

3) Ta có IC = ID = a, với I là trung điểm của CD. Trong tam giác vuông IBC ta có :

$$IB = \sqrt{BC^2 - IC^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$$

Tương tự, trong tam giác vuông IAD ta có :

$$IA = \sqrt{AD^2 - DI^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$$

Ta có : IA = IB = IC = ID = a.

Vậy I là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

4) Vì IA = IB = IC = a nên nếu gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm I trên mặt phẳng (ABC) ta có HA = HB = HC (các đoạn xiên bằng nhau có hình chiếu bằng nhau). Vậy H cách đều các điểm A, B, C nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC. Do đó H cũng là trực tâm của tam giác ABC.

Bài 38. Cho hình hộp chữ nhật ABCDA'B'C'D' và điểm M trên cạnh AD. Mặt phẳng (A'BM) cắt đường chéo AC' của hình hộp tại điểm H.

1) Chứng minh rằng khi M thay đổi trên cạnh AD thì đường thẳng MH cắt đường thẳng AB tại một điểm cố định.

2) Tính tỉ số thể tích của hai khối đa diện được tạo bởi mặt phẳng (A'BM) cắt hình hộp trong trường hợp M là trung điểm của cạnh AD.

3) Giả sử AA' = AB và MB vuông góc với AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (A'BM) vuông góc với AC' và điểm H là trực tâm của tam giác A'BM.

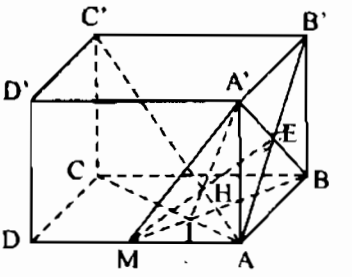
(Trích đề thi Đại học Ngoại ngữ, năm 1999)

Hướng dẫn giải

1) Gọi $E = AB' \cap A'B$, $I = MB \cap AC$

$A'I = (A'BM) \cap (AA'C'C)$, $H = A'I \cap AC'$

$M \in AD$, $H \in AC'$, $E \in AB'$ mà AD, AC', AB' đều thuộc mặt phẳng (DAB'C') nên ba điểm M, H, E $\in$ mp(DAB'C'). Mặt khác, ba điểm M, H, E cũng thuộc mặt phẳng (A'BM). Do đó ba điểm M, H, E thẳng hàng, nên đường thẳng MH luôn luôn đi qua điểm E cố định khi M thay đổi trên cạnh AD.



Hình 220

2) Nếu M là trung điểm của cạnh AD ta được hình chóp A'ABM có thể tích :

$$V' = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}MA.AB\right).AA' = \frac{1}{6}MA.AB.AA'.$$

Gọi V là thể tích của hình hộp ABCDA'B'C'D', V' là thể tích hình chóp, V'' là thể tích khối đa diện còn lại.

Ta có : $V = AD.AB.AA'$,

$$V' = \frac{1}{6}MA.AB.AA', \quad V'' = V - V'.$$

Tỉ số thể tích hai khối đa diện tạo thành so với thể tích hình hộp là :

$$\frac{V'}{V} = \frac{\frac{1}{6}MA.AB.AA'}{AD.AB.AA'} = \frac{\frac{1}{12}2.MA}{AD} \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{12}$$

Vậy : $V - V' = \frac{12}{12} - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \Rightarrow \frac{V''}{V} = \frac{11}{12}$

Vậy mặt phẳng (A'BM) chia thể tích hình hộp thành hai khối đa diện có tỉ số thể tích là $\frac{V''}{V} = \frac{1}{11}$

3) Nếu AA' = AB ta có AA'B'B là hình vuông nên $B'A \perp AB'$. Ta có : $BA' \perp (AB'C'D)$ nên $BA' \perp AC'$ (1).

Mặt khác, $MB \perp AC$, $MB \perp AA' \Rightarrow MB \perp (AA'C'C)$

$$\Rightarrow MB \perp AC' (2).$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AC' \perp (BMA')$. Do $AC \perp MH$ nên theo định lí ba đường vuông góc ta có $A'H \perp MB$. Tương tự, do $AB \perp A'M$ nên $BH \perp A'M$. Do đó H là trực tâm của tam giác A'BM.

2. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Cho sáu điểm phân biệt, trong đó chỉ có ba điểm thẳng hàng. Số đường thẳng qua từng hai trong sáu điểm đó là :

a) 10 b) 12 c) 13 d) 14.

2. Cho sáu điểm, trong đó chỉ có bốn điểm cùng nằm trong một mặt phẳng. Hỏi có bao nhiêu tứ diện có các đỉnh lấy từ sáu điểm đó ?

a) 14 b) 15 c) 16 d) 13.

3. Cho sáu điểm, trong đó chỉ có bốn điểm đồng phẳng. Số mặt phẳng phân biệt được xác định bởi ba trong sáu điểm đó là :

a) 14 b) 15 c) 16 d) 17.

4. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) Nếu đường thẳng a nằm trong mp(α) và đường thẳng b cắt (α) thì a và b chéo nhau.

b) Nếu ba đường thẳng đôi một cắt nhau thì chúng đồng quy.

c) Hai đường thẳng không có điểm chung nào cả thì song song.

d) Cho bốn điểm A, B, C, D. Nếu hai đường thẳng AB và CD chéo nhau thì hai đường thẳng AC và BD cũng chéo nhau.

5. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) Qua ba điểm có một mặt phẳng và chỉ một.

b) Hai đường thẳng không có điểm chung nào cả thì song song.

c) Mỗi đường thẳng a và b chéo với c thì a và b chéo nhau.

d) Cho bốn điểm A, B, C, D. Nếu hai đường thẳng AB và CD chéo nhau thì hai đường thẳng AC và BD cũng chéo nhau.

6. Cho tứ diện ABCD, đáy BCD có trực tâm H, trọng tâm G, tâm đường tròn ngoại tiếp O. Gọi B', C', D' là trung điểm của CD, DB, BC và I, J, K là chân các đường cao BH, CH, DH. Các mặt phẳng (ABB'), (ACC'), (ADD') có chung một đường thẳng là :

a) AO b) AG c) OH d) OG.

7. Thiết diện của khối chóp tứ giác cắt bởi một mặt phẳng là hình nào sau đây ?

a) Tam giác b) Tứ giác

c) Ngũ giác d) Hoặc a), hoặc b), hoặc c).

8. Hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) có giao tuyến là đường thẳng nào ?

a) AD b) CD c) AC d) BD.

9. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, Q, R, S, K lần lượt là trung điểm của AB, CD, DA, AC, BD, MN. Tìm giao điểm của đường thẳng NM với mặt phẳng (RQS).

a) Điểm M b) Điểm N c) Điểm Q d) Điểm K.

10. Cho hình chóp tứ giác SABCD, đáy ABCD là hình bình hành và I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD ; J là trọng tâm của tam giác ABD. Các đường thẳng CM, BN, SI đồng quy tại điểm nào ?

a) Điểm J b) Điểm I c) Điểm M d) Điểm S.

11. Cho hình chóp tứ giác SABCD có đáy là hình thang ABCD với đáy lớn AB. Gọi I là giao điểm của AD và BC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

a) SA b) SC c) SB d) SI.

12. Cho hai hình chữ nhật ABCD, ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M là điểm trên AC và N là điểm trên BF sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = \frac{1}{3}$. Gọi I là trung điểm của AB. Các đường thẳng AB, DM và EN đồng quy tại điểm nào ?

a) Điểm M b) Điểm N c) Điểm I d) Điểm A.

13. Gọi M, N là những điểm bất kì ở bên trong mặt (BCD), (ACD) của tứ diện ABCD ; K, L lần lượt là giao điểm của DN và AC, DM và BC ; I là giao điểm của KL và MN. Xác định giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (ABC) ?

a) Điểm M b) Điểm I c) Điểm L d) Điểm K.

14. Cho hình chóp tam giác SABC. Gọi M là trung điểm của SB. Kéo dài BA lấy điểm N sao cho BN = 2AB (AN = BN). Gọi I là một điểm thuộc đoạn SG với G là trọng tâm của tam giác SDC. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNI) là hình gì ?

a) Tam giác b) Tứ giác c) Ngũ giác d) Lục giác.

15. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm các mặt (ABD), (ABC). Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (BMN).

a) MN b) AC c) AM d) AB.

16. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC. Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho BK = 2KD. Gọi E là giao điểm của JK và CD ; F là giao điểm của IE và AD. Tìm giao điểm của đường thẳng AD và mặt phẳng (IJK).

a) Điểm I b) Điểm E c) Điểm F d) Điểm K.

17. Cho hình chóp tứ giác SABCD. Gọi M là một điểm ở trong tam giác SCD sao cho SM cắt CD tại I, BI cắt AC tại J, BM cắt SJ tại K. Tìm giao điểm của đường thẳng BM với mặt phẳng (SAC).

a) Điểm M b) Điểm K c) Điểm B d) Điểm J.

18. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC. Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho BK = 2KD và E là giao điểm của JK và CD. Tìm giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (IJK).

a) Điểm I b) Điểm J c) Điểm E d) Điểm K.

19. Cho tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của cạnh AB và M là một điểm di động trên cạnh CD ; E, F lần lượt là trung điểm của BC, BD ; K, L lần lượt là giao điểm của CI và AE, DI và AF. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (CID) và (AEF).

a) KL. b) AC c) EK d) FI.

20. Cho hình chóp tứ giác SABCD có đáy là hình thang ABCD với đáy lớn AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC. Giả sử MN cắt SI tại J và AJ cắt SD tại L. Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN).

a) Điểm I b) Điểm L c) Điểm D d) Điểm M.

21. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm các mặt (ABD), (ABC) và E, F lần lượt là trung điểm của MN, AB. Các đường thẳng AB, DM, CN đồng quy tại điểm nào ?

a) Điểm M b) Điểm N c) Điểm E d) Điểm F.

22. Cho hình chóp tứ giác SABCD. Gọi M là một điểm ở trong tam giác SCD. Giả sử SM cắt CD tại I, BI cắt AC tại J. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC).

a) SI. b) SJ c) SA d) SC.

23. Cho hai đường thẳng a, b phân biệt và mặt phẳng (α) không chứa a. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) Nếu a // b và b // (α) thì a // (α).

b) Nếu a // (α) và b // (α) thì a chéo b.

c) Nếu a // (α) và b cắt (α) thì a chéo b.

d) Nếu a // (α) và b $\subset$ (α) thì a // b.

24. Hình chóp đều là hình chóp nếu có :

a) Tất cả các cạnh bên đều bằng nhau.

b) Các cạnh bên bằng nhau và hình chiếu của đỉnh lên mặt đáy trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy.

c) Các cạnh đáy bằng nhau và hình chiếu của đỉnh lên mặt đáy cách đều các cạnh đáy.

d) Đáy là đa giác đều và tất cả các cạnh bên bằng nhau.

25. Cho tứ diện ABCD với E, F là trung điểm của AC, AD. Gọi I là một điểm bất kì trên AB. Đường thẳng E song song với mặt phẳng nào ?

a) mp(ICD) b) mp(ABD) c) mp(IAC) d) mp(IAD)

26. Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (BCD) và (DMN).

a) Đường thẳng qua D và song song với AB.

b) Đường thẳng qua D và song song với BC.

c) Đường thẳng qua D và song song với MN.

d) Cả a), b) và c) đều sai.

27. Cho tứ diện ABCD có BC = 1cm, CD = $\sqrt{3}$cm, BD = 2cm. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, AC. Tính góc giữa IJ và BD.

a) 90^o b) 60^o c) 45^o d) 120^o.

28. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi M là một điểm trên cạnh BC với BM = x ($0 \le x \le a$). Gọi (P) là mặt phẳng qua M, song song với AC và BD, lần lượt cắt AB, AD, DC tại N, R, S. Tính chu vi thiết diện MNRS.

a) 2a b) 2x(a – x) c) 2(a – x) d) x + a.

29. Cho hai hình vuông ABCD, ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) AD // BE

b) (DAF) // (CBE)

c) DF // BC

d) (ABD) // (CFE).

30. Cho hình chóp SABC với $AB = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, $BC = 4\sqrt{3}$, $CA = 4\sqrt{2}$. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) (EFG) // (SAB)

b) EF // SC

c) $\widehat{FEG} = 120^{\circ}$

d) $S_{(EFG)} = \sqrt{6}$.

31. Trong mặt phẳng (P), cho hình vuông ABCD. Trên các đường thẳng Ax, By, Cz, Dt song song với nhau và ở cùng một phía đối với (P) lấy các điểm A', B', C', D' sao cho AA' = BB' = CC' = DD'. Cặp mặt phẳng nào sau đây song song ?

a) (ABC) và (B'C'D')

b) (ABB') và (CDD')

c) (A'BD) và (C'B'D')

d) (A'AD) và (B'BD).

32. Cho hình chóp SABCD với đáy ABCD là hình bình hành. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng qua S và song song với đường thẳng :

a) AE b) BD c) AC d) EF.

33. Cho tứ diện ABCD, với M là trung điểm của BC. Gọi (P) là mặt phẳng qua M, song song với các cạnh AC, BD. Biết AC = 12cm, BD = 8cm, tính chu vi thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (P).

a) 10cm b) 15cm c) 20cm d) 30cm.

34. Cho hình chóp SABCD với đáy ABCD là hình bình hành. Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của SA, SB, SD. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) (IJK) // (BCD)

b) (IKL) // SA

c) IK $\subset$ (SAC)

d) JL // SC.

35. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. M là một điểm trên cạnh SA. Mặt phẳng (MBC) cắt SD tại N. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) BM // CN

b) (SMN) // CD

c) AB // (MNBC)

d) MN // AD.

36. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành và M, N, R, S lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Một mặt phẳng (P) di động luôn song song với cạnh BC và đi qua trung điểm R của SC. Khi di động như trên, mặt phẳng (P) luôn chứa một đường thẳng cố định nào ?

a) MN b) NS c) SR d) NR.

37. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Ba đỉnh B, D, A' tạo thành một tam giác gọi là mặt chéo tam giác ứng với đỉnh A. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) Hai mặt chéo ứng với hai đỉnh đối diện có các cạnh tương ứng bằng nhau.

b) Hai mặt chéo chia đường chéo nối hai đỉnh tương ứng thành ba đoạn bằng nhau.

c) Đường chéo nối hai đỉnh đối diện đi qua trọng tâm của hai mặt chéo tương ứng với hai đỉnh đó.

d) Cả a), b) và c) đều đúng.

38. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) chuyển động luôn song song với cạnh BC và đi qua trung điểm C' của đoạn SC. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SA, SB, SD lần lượt tại A', B', D'. Thiết diện A'B'C'D' là hình gì ?

a) Tam giác b) Hình thang

c) Hình chữ nhật d) Ngũ giác.

39. Cho hình chóp SABCD với đáy ABCD là hình chữ nhật.

BC = 4cm, AC = 5cm, SA = SB = 3cm. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SC, SD. Tính góc giữa các cặp đường thẳng IJ và BC.

a) 60^o b) 30^o c) 90^o d) 45^o.

40. Cho hai đường thẳng a, b và hai mặt phẳng (α) và (β). Mệnh đề nào sau đây sai ?

a) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.

b) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $b \perp a$.

c) Nếu $a \perp (\alpha)$ và $a \parallel (\beta)$ thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

d) Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (\alpha)$ hoặc $b \subset (\alpha)$.

41. Cho một đường thẳng a và hai mặt phẳng (α) và (β). Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) Nếu $(\alpha) \perp (\beta)$, mặt phẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với (β).

b) Nếu (α) và (β) cùng song song với a thì (α) và (β) song song với nhau.

c) Nếu $a // (\alpha)$ và $(\beta) \perp (\alpha)$ thì $(\beta) \perp a$.

d) Nếu $a // (\alpha)$ và $(\beta) \perp a$ thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

42. Tứ diện SABC có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B, cạnh AC = 2a, SA $\perp$ mp(ABC) và SA = a. Khoảng cách từ trung điểm của AC đến mp(SBC) bằng bao nhiêu ?

a) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ b) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ c) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{a}{3}$.

43. Cho hình chóp SABC, có đáy là tam giác ABC vuông tại A, AC = a, BC = $a\sqrt{3}$; SB vuông góc với mặt đáy và SB = $a\sqrt{2}$; H và K lần lượt là hình chiếu của B lên SA và SC. Diện tích tam giác BHK bằng bao nhiêu ?

a) $\frac{a^2\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{a^2\sqrt{5}}{10}$ c) $\frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

44. Trong không gian cho 4 đoạn thẳng AB, BC, CD, DA thoả mãn các điều kiện sau : AB là đoạn vuông góc chung của AD và BC, AB = $a\sqrt{3}$, AD = BC = a. Góc hợp bởi hai đường thẳng AB và CD là 30°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng bao nhiêu ?

a) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ c) $a\sqrt{3}$ d) 2a.

45. Cho tứ diện OABC có ba mặt vuông tại O và OA = OB = OC = a. Biết rằng tổng các khoảng cách từ một điểm tuỳ ý thuộc mặt phẳng đáy ABC đến ba mặt bên không đổi, hỏi tổng đó bằng bao nhiêu ?

a) a b) 2a c) 3a d) $a\sqrt{2}$.

46. Hình lăng trụ tứ giác có cạnh bên vuông góc với mặt đáy là hình nào sau đây ?

a) Hình hộp b) Lăng trụ đều

c) Lăng trụ đứng d) Hình hộp chữ nhật.

47. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC từng đôi một vuông góc với nhau tại O. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O xuống mặt phẳng (ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) H là trung điểm BC. b) H là trọng tâm ΔABC.

c) H là trực tâm ΔABC. d) Cả a), b) và c) đều sai.

48. Cho hình chóp tam giác SABC. Một mặt phẳng qua AC và vuông góc với SB cắt hình chóp theo một thiết diện là tam giác có các cạnh là 5cm, 6cm, 9cm. Biết rằng mặt phẳng cắt hợp với mp(ABC) một góc 45°, tính diện tích mặt ABC.

a) $5\sqrt{2}\,cm^2$ b) $20\,cm^2$ c) $600\,cm^2$ d) $108\sqrt{3}\,cm^2$.

49. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh 4a. SA = 3a và SD = 5a. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) SA ⊥ (ABCD) b) BD ⊥ (SAC)

c) AB ⊥ (SAD) d) Cả a), b) và c) đều đúng

50. Cho hình chóp tam giác đều SABC, cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi O là tâm của đáy. Tính chiều cao hình chóp.

a) $\frac{a\sqrt{15}}{6}$ b) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ c) 3a d) Một kết quả khác.

51. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh 4a, SA = 3a, SD = 5a. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) SA ⊂ mp(BCD) b) BD ⊥ mp(SAC)

c) BC ⊥ mp(SCD) d) AB ⊥ mp(SCD).

52. Tứ diện SABC có hai mặt (SBC) và (ABC) ở trong hai mặt phẳng vuông góc. ΔSBC là tam giác đều cạnh a. ΔABC vuông tại A và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. H là hình chiếu của S lên mp(ABC), K là hình chiếu của H lên mp(SAB). Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) H là trọng tâm ΔABC b) SA = $a\sqrt{2}$

c) HK = $a\sqrt{3}$ d) Cả a), b) và c) đều sai.

53. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có ba góc phẳng ở đỉnh A đều bằng 60° và có các cạnh đều bằng nhau. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) BCD'A' là hình vuông b) AC' // DA'

c) AC' // BA' d) Cả a), b) và c) đều đúng.

54. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 60^o$. Từ đỉnh B kẻ đường thẳng nghiêng với mp(ABC) và tạo với các đường thẳng BA, BC một góc 60^o. Tính cosin của góc giữa đường thẳng này và mặt phẳng (ABC).

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

55. Một lăng trụ đứng có chiều cao 20cm. Đáy lăng trụ là một tam giác vuông có cạnh huyền 13cm và diện tích $30cm^2$. Tính diện tích xung quanh của lăng trụ.

a) $400cm^2$ b) $20cm^2$ c) $600cm^2$ d) $108\sqrt{3}cm^2$.

56. Cho hình chóp tứ giác SABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O và SA = SB = SC = SD. Gọi E là trung điểm của AD, O là giao điểm hai đường chéo AC và BD, d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) và m là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) $d \perp mp(ABCD)$ b) $BC \perp mp(SOE)$

c) $CD \perp mp(O, m)$ d) Cả a), b) và c) đều đúng.

57. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, BC = a, S là một điểm nằm ngoài mp(ABC) sao cho $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi O là hình chiếu của S lên mp(ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) O là trung điểm AB b) $d(S, mp(ABC)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

c) $d(S, CA) = a\sqrt{5}$ d) $SO = a\sqrt{\frac{5}{8}}$.

58. Một lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là một tam giác vuông tại A. $\hat{C} = 60^o$, AC = a. Đường chéo BC' của mặt bên (BB'C'C) tạo với đường chéo mặt bên (AA'C'C) một góc 30^o. Tính độ dài đoạn AC'.

a) 2a b) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ c) 3a d) $\frac{3a}{\sqrt{2}}$.

59. Cho hình vuông ABCD, tâm O, cạnh a. Trên đường thẳng vuông góc với mp(ABCD) tại O lấy điểm S sao cho $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính cosin của góc giữa cạnh bên và mặt đáy của hình chóp SABCD tạo thành.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) Một kết quả khác.

60. Trên mặt phẳng (P) cho tam giác ABC vuông ở A, có AB = a, $\widehat{ABC} = 60^0$. Lấy điểm H thuộc cạnh AC sao cho AH = 2HC. Đoạn SH = $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ vuông góc với mp(P). I là trung điểm của BC. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) $SA = a\sqrt{3}$ b) $SC = a\sqrt{2}$

c) $\widehat{SIA} = 90^0$ d) Cả a), b) và c) đều sai.

61. Cho hình chóp tam giác SABC với ABC là tam giác đều. SA ⊥ mp(ABC). Gọi I, J lần lượt là trung điểm BC, AB ; H, K lần lượt là tâm các tam giác SBC, ABC. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) BC ⊥ mp(SAI) b) CI // mp(SAB)

c) IJ ⊥ mp(SAC) d) BC // mp(SAI).

62. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA ⊥ mp(ABCD), SA = a. Gọi M là điểm di động trên đoạn CD. Đặt CM = x. Gọi K là hình chiếu của S trên BM. Mệnh đề nào sau đây đúng.

a) $\Delta ABK \backsim \Delta MBC$ b) $BM = \sqrt{a^2 + x^2}$

c) $SK = \sqrt{\frac{2x^2 + a^2}{x^2 + a^2}}$ d) Cả a), b) và c) đều đúng.

63. Mỗi cạnh bên hình chóp tứ giác đều bằng 4cm. Một mặt phẳng đi qua các trung điểm hai cạnh đáy kề nhau và trung điểm của đường cao. Tính diện tích thiết diện.

a) $5\sqrt{2}\ cm^2$ b) $20\ cm^2$

c) $4\sqrt{3}\ cm^2$ d) Một kết quả khác.

64. Cho một hình chóp tứ giác đều. Tính cosin của góc giữa mặt bên và mặt đáy, biết rằng cạnh đáy và cạnh bên lần lượt bằng 10cm và 13cm.

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) Một kết quả khác.

65. Cho hai tam giác vuông ACD và BCD nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Biết AC = AD + BC = BD = a và CD = 2x. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) $IJ = \sqrt{2a^2 - x^2}$ b) $IJ \perp AC$

c) $AB = \dfrac{\sqrt{2a^2 - x^2}}{2}$ d) Cả a), b) và c) đều sai.

66. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC từng đôi vuông góc. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O xuống mp(ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) $OB \perp mp(OCA)$ b) $CA \perp mp(OBH)$

c) $AB \perp mp(OCH)$ d) Cả a), b) và c) đều đúng.

67. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông ABCD và mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi I là trung điểm của AB ; F là trung điểm của AD. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) $mp(SCD) \perp mp(ABD)$ b) $mp(SCF) \perp mp(SID)$

c) $mp(SID) \perp mp(SAB)$ d) Cả a), b) và c) đều đúng.

68. Hai tam giác ABC và ABC' có cạnh AB chung ở trong hai mặt phẳng hợp thành nhị diện có số đo 60^0. Đoạn CC' vuông góc với mặt phẳng (ABC'). Các góc A, B của tam giác ABC' bằng 30^0 và 60^0, cạnh AC' = 18cm. Tính diện tích tam giác ABC.

a) $20\ cm^2$ b) $72\sqrt{3}\ cm^2$

c) $108\sqrt{3}\ cm^2$ d) Một kết qua khác.

69. Gọi I là điểm bất kì trên đường kính AB = 2R của đường tròn tâm O, CD là dây cung đi qua I. Trên đường vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn kẻ từ I, lấy điểm S sao cho OS = R. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) $SA \perp SC$ b) $CA \perp BS$

c) $SC \perp SD$ d) $OS \perp OI$.

70. Cho hình chóp tứ giác SABCD, có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ vuông góc với đáy. Tính cosin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (SCD) và (SBC).

a) $-\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{1}{3}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

71. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, cạnh a. Biết SO = 2a vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính độ dài cạnh bên.

a) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{a\sqrt{15}}{6}$ c) $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ d) Một kết quả khác.

72. Cho tứ diện đều SABC cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm SA và BC ; O là tâm của đáy ABC. Trên SO lấy điểm P sao cho $\widehat{BPC} = 90^\circ$. Kết quả nào sau đây đúng ?

a) MN là đường vuông góc chung của SA và BC

b) $S_{(BMC)} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$

c) $OP = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

d) Cả a), b) và c) đều đúng.

73. Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình chữ nhật ABCD với AD = 2a, AB = a, AA' = $a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A'A và DE.

a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ c) $a\sqrt{2}$ d) Cả a), b) và c) đều sai.

74. Hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác cân, AB = AC = $a\sqrt{5}$, BC = 4a. Đường cao hình chóp là SA = $a\sqrt{3}$. Một mặt phẳng (P) vuông góc với đường cao AH của đáy ABC sao cho khoảng cách từ điểm A đến mp(P) bằng x. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mp(P).

a) $S_{td} = 2\sqrt{5}x(a-x)$ b) $S_{td} = 4\sqrt{3}x(a-x)$

c) $S_{td} = 4\sqrt{15}x(a-x)$ d) Một kết quả khác.

75. Cho lăng trụ đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy a, cạnh bên 2a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của B'C', AB ; α là góc giữa mặt phẳng (ABC') và mặt đáy. Kết quả nào sau đây đúng ?

a) $\tan\alpha = \frac{2}{3}$ b) $S_{(ABC')} = \frac{a^2\sqrt{19}}{4}$

c) IJ = 3a d) Cả a), b) và c) đều sai.

76. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

a) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ c) $a\sqrt{2}$ d) 2a.

77. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) mp(A'BC') // mp(AD'C) b) B'D ⊥ mp(A'BC')

c) $d(A, D'C) = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ d) Cả a), b) và c) đều đúng.

78. Trong mặt phẳng (P) cho một đường tròn tâm (O), AB là một đường kính cố định của (O), M là một điểm di động trên (O). Gọi S là một điểm cố định sao cho SA ⊥ mp(P). Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của A trên SM và SB. Khi M chạy khắp đường tròn (O) thì điểm E chạy trên đường tròn có đường kính là :

a) AE b) AD c) AF d) AO.

79. Cho một hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác cân AB = AC = $a\sqrt{5}$, BC = 4a. Đường cao của hình chóp là SA = $a\sqrt{3}$. Tính diện tích toàn phần của hình chóp.

a) $S_{tp} = a^2(\sqrt{15} + 2\sqrt{2})$ b) $S_{tp} = a^2(\sqrt{15} + 2 + 2\sqrt{2})$

c) $S_{tp} = a^2(\sqrt{5} + 2\sqrt{2})$ d) $S_{tp} = a^2(\sqrt{5} + 2 + 2\sqrt{2})$.

80. Cho hình chóp tứ giác SABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SD, SB. Tính khoảng cách giữa các đường thẳng MN và AP.

a) $a\sqrt{2}$ b) 2a c) $\frac{a}{2}$ d) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

81. Cho hình chóp SABC, đáy ABC là tam giác cân, AB = AC và BC = 2a. Mặt bên SBC là tam giác cân SB = SC và đường cao SI = x. Mặt bên SBC nghiêng trên đáy một góc 60^o. Gọi J là trung điểm của SA và AI = x. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) ΔSAI vuông b) IJ = $\frac{x\sqrt{3}}{2}$

c) SI ⊥ mp(ABC) d) $\widehat{SIA} = 90^o$.

82. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AD = 2a, AB = a ; SA = $a\sqrt{2}$ là đường cao hình chóp. Gọi E là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SE.

a) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ b) $a\sqrt{2}$ c) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ d) Một kết quả khác.

83. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a. SA = a vuông góc với mp(ABCD). Gọi E là một điểm di động trên đoạn BC, F là hình chiếu của S trên DE. Khi E di động trên BC thì điểm F di động trên đường tròn có đường kính là :

a) AF b) AD c) AE d) AO.

84. Hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = $\sqrt{2}$, $\widehat{BAC} = 45^0$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cạnh SB tạo với đáy một góc 45^0. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB, SC. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) Các mặt bên của hình chóp SABC là những tam giác vuông.

b) PQ là đường vuông góc chung của AB và SC.

c) $S_{(SBC)} = \sqrt{2}$

d) Cả a), b) và c) đều đúng.

85. Cho hình lăng trụ đều ABC.A'B'C' cạnh đáy a, cạnh bên 2a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của B'C' và AB. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A'I và CJ.

a) $a\sqrt{2}$ b) 3a c) 2a d) Một kết quả khác.

86. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau và vuông góc, có đường vuông góc chung là AB = a. Gọi C, D lần lượt di động trên d_1 và d_2 sao cho CD = k không đổi. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) $AC^2 + BD^2 = b^2 \quad a^2$ b) $AD^2 + BC^2 = b^2 + a^2$

c) $d(AB, CD) = \dfrac{BD.AC}{\sqrt{b^2 - a^2}}$ d) Cả a), b) và c) đều đúng.

87. Trên đường tròn tâm O, bán kính R lấy điểm A cố định và một đường kính thay đổi CD. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn tại A lấy điểm B sao cho AB = 2R. Gọi BE là đường cao của tam giác BCD. Khi CD thay đổi thì điểm E chạy trên đường tròn đường kính là :

a) AO b) AE c) AD d) BE.

88. Cho hình chóp SABC, đáy ABC là tam giác cân, AB = AC và BC = 2a. Mặt bên SBC là tam giác cân, SB = SC và đường cao SI = 2a. Mặt bên SBC nghiêng trên đáy một góc 60^0. Gọi J là trung điểm của SA và AI = 2a. Kết quả nào sau đây đúng ?

a) IJ là đường vuông góc chung của AC và SB.

b) Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng 60^0

c) ΔSAI vuông

d) $\widehat{SIA} = 90^0$.

89. Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác cân, AB = AC = $a\sqrt{5}$, BC = 4a. Đường cao hình chóp là SA = $a\sqrt{3}$. Một mặt phẳng (P) vuông góc với đường cao AH của đáy ABC sao cho khoảng cách từ A đến mp(P) bằng x. Mặt phẳng (P) cắt hình chóp theo một thiết diện, với giá trị nào của x thì diện tích của thiết diện lớn nhất ?

a) $x = \frac{a}{2}$ b) $x = 2a$ c) $x = \frac{a}{4}$ d) Một kết quả khác.

90. Trong một góc tam diện có hai góc phẳng bằng nhau và bằng 60^0 ; góc nhị diện đối diện với góc phẳng thứ ba bằng 90^0. Tính góc phẳng thứ ba của góc tam diện này.

a) 60^0 b) 90^0 c) 120^0 d) 45^0.

91. Trong một hình chóp cụt tứ giác đều, đường chéo của mặt bên dài 8cm và vuông góc với cạnh bên hình chóp cụt. Tỉ lệ giữa cạnh đáy lớn và cạnh bên là 5 : 3. Xác định diện tích của mặt chéo hình chóp cụt.

a) $\frac{62\sqrt{263}}{5}$ cm^2 b) $\frac{6\sqrt{561}}{25}$ cm^2

c) $\frac{64\sqrt{161}}{25}$ cm^2 d) Một kết quả khác.

92. Cạnh đáy một hình chóp cụt tứ giác đều bằng 18 dm và 12 dm ; mặt bên nghiêng trên đáy lớn một góc 60^0. Tính diện tích mặt chéo của hình chóp cụt.

a) $45\sqrt{5}$ dm^2 b) $54\sqrt{3}$ dm^2

c) $5\sqrt{2}$ dm^2 d) Một kết quả khác.

93. Trong một hình chóp cụt tứ giác đều có các cạnh đáy lớn và đáy nhỏ lần lượt là 12 dm và 4 dm, dựng một hình chóp có đáy là đáy lớn của hình chóp cụt đã cho và đỉnh là tâm của của đáy nhỏ. Biết diện tích của mặt bên hai hình là bằng nhau. Tính chiều cao của hình chóp.

a) $2\sqrt{\frac{13}{7}}$ dm b) $\sqrt{\frac{17}{7}}$ dm

c) $2\sqrt{\frac{17}{7}}$ dm d) Một kết quả khác.

94. Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là một tứ giác có $\widehat{A} = 120^\circ$, AB = AD = a, $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$, SA vuông góc với đáy và SA = a. Gọi I là trung điểm của SC. Hình chóp có mặt đối xứng là :

a) mp(SAC) b) mp(SBC) c) mp(BID) d) mp(SBD).

95. Cho ba tia không đồng phẳng Ox, Oy, Oz đôi một hợp với nhau góc 60°. A là một điểm trên Oz với OA = a. Gọi A' là hình chiếu của A lên mặt phẳng (Oxy). Tính AA' theo a.

a) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ b) $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ c) $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{a}{3}$.

96. Trong một tứ diện đều, kết quả nào sau đây đúng ?

a) Đoạn nối trung điểm hai cạnh đối diện là trục đối xứng.

b) Mặt phẳng chứa một cạnh tứ diện và qua trung điểm cạnh đối diện là mặt đối xứng.

c) Trọng tâm tứ diện là tâm đối xứng.

d) Cả a), b) và c) đều đúng.

97. Cho ba tia không đồng phẳng Ox, Oy, Oz đôi một hợp với nhau góc 60°. A là một điểm trên Oz với OA = a. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên Ox và Oy với OM = x, ON = y. Điều kiện cần và đủ để tam giác AMN vuông tại A là :

a) $a(x + y) - xy = 2a^2$ b) $a(x + y) + xy = 2a^2$

c) $2a(x + y) + xy = 2a^2$ d) Một điều kiện khác.

98. Trên mặt phẳng (P) cho góc vuông xOy. Đoạn SO = a vuông góc với mp(P). Các điểm M, N theo thứ tự di động trên Ox, Oy sao cho ta luôn có OM + ON = a. Tổng các góc phẳng ở đỉnh S của góc tam diện S(OMN) luôn bằng :

a) 30° b) 60° c) 90° d) 120°.

99. Đáy ABCD của hình chóp SABCD là một hình vuông. Hai mặt bên SAB và SAD cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SC và mặt phẳng (SAB) bằng 30°. Tính thể tích khối chóp SABCD.

a) $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ b) $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ c) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ d) Một kết quả khác.

100. Đáy của một lăng trụ đứng là một tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng 32cm và 24cm. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ bằng 25cm. Tính thể tích của hình lăng trụ.

a) 11,52 cm^3 b) 13,44 cm^3 c) 12,43 cm^3 d) 10,57 cm^3.

101. Cho tứ diện ABCD với M, N là trọng tâm các mặt ABD, ACD. Xét các mệnh đề :

(i) MN // mp(ABC) (ii) MN // mp(BCD)

(iii) MN // mp(ACD) (iv) MN // mp(CDA)

Mệnh đề nào đúng ?

a) (i) và (ii) b) (ii) và (iii)

c) (iii) và (iv) d) (i), (ii), (iii) và (iv).

102. Tính diện tích toàn phần của hình tứ diện SABC có cạnh a.

a) $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$ c) $a^2\sqrt{3}$ d) Một kết quả khác.

103. Đáy ABC của hình lăng trụ ABC.A'B'C' là tam giác đều cạnh a. Góc giữa cạnh bên của hình lăng trụ và mặt đáy bằng 30^0. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' thuộc đáy trên xuống mặt phẳng đáy dưới trùng với trung điểm H của cạnh BC. Tính thể tích của hình lăng trụ.

a) $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ b) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ d) Một kết quả khác.

104. Diện tích ba mặt của hình hộp chữ nhật bằng 20 cm^2, 28 cm^2, 35 cm^2. Tính thể tích hình hộp.

a) 125cm^2 b) 140cm^2 c) 145cm^2 d) Một kết quả khác.

105. Trong một lăng trụ xiên, khoảng cách giữa các mặt bên lần lượt là 3cm, 4cm, 5cm ; cạnh bên có độ dài 6cm. Tính diện tích xung quanh của lăng trụ.

a) 72cm^2 b) 60cm^2 c) 120cm^2 d) Một kết quả khác.

106. Tính thể tích hình tứ diện cạnh a.

a) $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ b) $\frac{a^2\sqrt{2}}{12}$ c) $\frac{a^3}{6}$ d) Một kết quả khác.

107. Cho hình chóp tứ giác đều có trung đoạn bằng a. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy 45°. Tính thể tích hình chóp.

a) $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ b) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{a^3\sqrt{11}}{12}$ d) Một kết qua khác.

108. Trong một hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D', các đường chéo đáy AC, BD hợp với nhau một góc α. Biết BM = b, $\widehat{BMB'} = \beta$. Tính diện tích xung quanh của hình hộp.

a) $2\sqrt{2}b^2 \sin 2\beta \sin\frac{2\alpha+\pi}{4}$. b) $2\sqrt{2}b^2 \cos 2\beta \sin\frac{2\alpha+\pi}{4}$

c) $\sqrt{2}b^2 \sin 2\beta \cos\frac{2\alpha+\pi}{4}$ d) Một kết qua khác.

109. Cho góc tam diện Sxyz với $\widehat{xSy} = 120°$, $\widehat{ySz} = 60°$, $\widehat{zSx} = 90°$. Trên các tia Sx, Sy, Sz theo thứ tự lấy các điểm A, B, C sao cho SA = SB = SC = a. Để tính bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện SABCD, một học sinh đã tiến hành các bước sau :

(i) Gọi I là tâm và r là bán kính hình cầu nội tiếp, ta có

$V_{SABC} = V_{ISAB} + V_{ISBC} + V_{ISAC} + V_{IABC}$

$\frac{r}{3}S_{SAB} + \frac{r}{3}S_{SBC} + \frac{r}{3}S_{SAC} + \frac{r}{3}S_{ABC} = \frac{r}{3}S_{tp}$

(ii) $V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot a\cdot\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

(iii) $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$; $S_{SAB} = \frac{1}{2}\cdot SA\cdot SB\cdot \sin 120° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

$V_{SBC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{SAC} = \frac{a^2}{2}$.

(iv) Suy ra : $r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{a}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Lí luận trên nếu sau thì sai từ giai đoạn nào ?

a) Sai từ (i) b) Sai từ (ii) c) Sai từ (iii) d) Lí luận trên đúng.

110. Cho tứ diện ABCD có hai mặt ACD, BCD là những tam giác đều cạnh a ở trong hai mặt phẳng vuông góc. Tính bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện.

a) $\frac{a(\sqrt{2}-1)}{4}$ b) $\frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$ c) $\frac{a(2-\sqrt{3})}{2}$ d) Một kết quả khác.

111. Cạnh hình lập phương bằng a, bán kính các mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp của hình lập phương theo thứ tự là :

a) a ; $a\sqrt{3}$ b) $\frac{a}{2}$; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{a}{2}$; $a\sqrt{3}$ d) Một kết quả khác.

112. Một tứ diện đều có cạnh a nội tiếp trong một hình nón. Tính thể tích hình nón.

a) $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ b) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ d) Một kết quả khác.

113. Thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác có một góc bằng 120°, có diện tích là $40\sqrt{3}$ cm^2. Chiều cao, đường sinh và bán kính đáy của hình nón theo thứ tự là :

a) $\sqrt{10}$ cm ; $2\sqrt{10}$ cm ; $2\sqrt{30}$ cm b) $2\sqrt{10}$ cm ; $4\sqrt{10}$ cm ; $2\sqrt{30}$ cm

c) $2\sqrt{10}$ cm ; $4\sqrt{10}$ cm ; $\sqrt{30}$ cm d) Một kết quả khác.

114. Qua một điểm trên mặt cầu kẻ một mặt phẳng tiếp xúc và một mặt phẳng cắt hình cầu theo một thiết diện có diện tích bằng $\frac{1}{4}$ diện tích hình tròn lớn. Góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng trên là :

a) 45° b) 30° c) 60° d) Một kết quả khác.

115. Một mặt cầu tâm O có bán kính bằng 13cm. Một mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo một giao tuyến là đường tròn đi qua ba điểm A, B, C sao cho AB = 6cm, BC = 8cm, CA = 10cm. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P).

a) 9cm b) 10cm c) 13cm d) Một kết quả khác.

116. Trong một hình trụ, bán kính đáy 40cm, đường cao 30cm, dựng mặt phẳng (P) cắt hình trụ theo thiết diện là hình chữ nhật và cách trục hình trụ 24cm. Tính diện tích thiết diện.

a) 1920 cm^2 b) 2010 cm^2 c) 1800 cm^2 d) Một kết quả khác.

117. Đáy của một lăng trụ đứng là một tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng 32cm, 24cm. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ bằng 25cm. Tính thể tích lăng trụ.

a) 12,43 cm^3 b) 11,52 cm^3 c) 10,57 cm^3 d) Một kết quả khác.

118. Một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông ở đỉnh. Diện tích thiết diện bằng $25\,cm^2$. Đường sinh và diện tích đáy theo thứ tự là :

a) $2\sqrt{2}\,cm$; $20\pi cm^2$ b) $5\sqrt{5}\,cm$; $20\pi cm^2$

c) $5\sqrt{2}\,cm$; $10\pi cm^2$ d) $5\sqrt{2}\,cm$; $25\pi cm^2$.

119. Các bán kính đáy của một hình nón cụt lần lượt là a và 3a, đường sinh là 2,9a. Tính thể tích hình nón cụt đó.

a) $\frac{\pi a^3}{3}$ b) $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$ c) $\frac{91\pi a^3}{10}$ d) Một kết quả khác.

120. Cho một mặt cầu bán kính R và hình nón nội tiếp mặt cầu. Chiều cao của hình nón bằng $\frac{3R}{2}$. Tỉ số diện tích toàn phần của hình nón và diện tích của mặt cầu là :

a) $\frac{8}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{9}{16}$ d) Một kết quả khác.

ĐÁP SỐ

1c	2a	3d	4d	5c	6b	7d	8c	9d	10a
11d	12c	13b	14a	15a	16c	17b	18c	19a	20b
21d	22b	23a	24d	25d	26b	27b	28a	29b	30c
31c	32d	33c	34a	35d	36c	37d	38b	39c	40a
41d	42b	43b	44a	45a	46c	47c	48b	49d	50a
51b	52d	53a	54b	55c	56d	57b	58c	59b	60c
61a	62d	63a	64c	65c	66d	67b	68c	69c	70a
71c	72d	73c	74b	75b	76a	77d	78c	79b	80c
81b	82c	83b	84d	85c	86d	87a	88c	89a	90b
91c	92a	93c	94a	95b	96d	97a	98c	99c	100a
101a	102c	103a	104b	105c	106b	107b	108a	109d	110c
111b	112c	113c	114b	115d	116a	117b	118d	119c	120c

3. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Chương 1.
ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

1.1 a) $IK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

b) Tìm $E = MK \cap CD$ và $H = EI \cap AD$.

Thiết diện là tứ giác MIKH.

1.2 a) Gọi $O = AC \cap BD$. Tìm $I = SO \cap BN$, $P = AC \cap DM$, $K = SP \cap MN$.

b) Gọi $E = SA \cap CI$. Thiết diện là tứ giác BCNE.

1.3 a) Gọi $O = AC \cap BD$, $SO = (SAC) \cap (SBD)$, $K = AI \cap SO$. MN luôn đi qua điểm K cố định.

b) PQ luôn đi qua điểm A cố định.

c) Gọi $E = AD \cap BC$ ta có $SE = (SAD) \cap (SBC)$

Giao điểm IM và AN luôn nằm trên đường thẳng SE cố định.

1.4 Vẽ thêm AE // CS ($E \in$ đường thẳng MK) ta có EA = MS.

$$I = AC \cap MK \Rightarrow \frac{IA}{IC} = \frac{EA}{MC} = \frac{MS}{MC} = \frac{2}{3}$$

Vẽ thêm AH // CB ($H \in IN$), ta có :

$$\frac{HA}{NC} = \frac{IA}{IC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{HA}{NB} = \frac{HA}{NC} = \frac{IA}{IC} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{LA}{LB} = \frac{HA}{NB} = \frac{IA}{IC} = \frac{2}{3}$$

1.5 a) Xét tam giác SBI ta có SN và IM là hai trung tuyến.

Gọi $G' = IM \cap SN \Rightarrow SG' = 2G'N \Rightarrow G'$ là trọng tâm G của tam giác SAD $\Rightarrow$ M, G, I thẳng hàng.

b) $D \in$ mp(CGM).

Gọi $A' = DG \cap SA$.

Thiết diện cắt bởi mặt phẳng (CGM) là tứ giác DA'MC.

c) Gọi $K = AC \cap BN$,

$SK = (SBN) \cap (SAC)$,

$H = SK \cap MG$,

$C' = SC \cap AH$,

$D' = AG \cap SD$.

Thiết diện cắt bởi mặt phẳng (AGM) là tứ giác AD'C'M.

Chương 2.
QUAN HỆ SONG SONG

2.1 a) Tứ giác MNN'M' là hình thang.

b) Chứng minh $\frac{AM'}{AD} = \frac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N' // DF // CE$

c) Chứng minh mp(M'N'N) // mp(DEF) $\Rightarrow$ MN // mp(DEF)

2.2 a) $mp(\alpha) // CD \Rightarrow PQ // MN // CD$

$\Rightarrow$ MNPQ là hình thang.

b) Vì BC // AD $\Rightarrow$ SI = mp(SBC) $\cap$ mp(SAD) // AD $\Rightarrow$ điểm I chạy trên đoạn thẳng $SI_0 \subset SI$ với $SI_0 = AD$.

2.3 a) Gọi $I = SG \cap A'C'$, $D' = B'I \cap SD$

b) Muốn A'B' // C'D thì cần phải có $(\alpha) // SE$.

c) Muốn A'B'C'D' là hình bình hành nghĩa là A'B' // C'D' và A'D' // B'C' thì mặt phẳng (α) phải song song với SE và SF nghĩa là $(\alpha) // mp(SEF)$.

2.4 Vẽ Bx' // Ax. Trên Bx' lấy M' sao cho BM' = AM suy ra $\Delta BNM'$ cân (BM' = BN).

MM // AB và M'N // Bt trong đó Bt là phân giác ngoài của góc x'By.

Ta có (MM'N) // mp(AB, Bt) suy ra MN // mp(AB, Bt) cố định.

2.5 a) Vì ACC'A' là hình bình hành nên AC' và A'C cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường. Tương tự hai đường chéo BD' và B'D cắt nhau tại trung điểm N của chúng.

b) Điểm M có hình chiếu là trung điểm I của đoạn AC và N có hình chiếu là trung điểm K của BD. Do đó MI song song NK và MI = NK $\Rightarrow$ MN = IK.

c) Thiết diện là tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ với A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB', CC', DD'.

Chương 3.

QUAN HỆ VUÔNG GÓC

3.1 b) Tập hợp các điểm D là đường tròn đường kính AB và nằm trong mặt phẳng (SAB). Tập hợp các điểm E là đường tròn đường kính AC và nằm trong mặt phẳng (SAC).

c) $AE \perp mp(SBC)$ vì $AE \perp SC$ và $BC \perp mp(SAC)$ suy ra $BC \perp AE$.

Ta có $SB \perp mp(ADE)$ vì $SB \perp AD$ và $SB \perp AE$ (vì $AE \perp mp(SBC)$

$DE \perp AE$ vì $DE \subset mp(SBC)$ và $AE \perp mp(SBC)$.

3.2 a) $\left.\begin{matrix} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp (SBD)$ mà $AC \subset (SAC)$ nên $(SAC) \perp (SBD)$

b) $\left.\begin{matrix} BC \perp IK \\ BC \perp SK \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SIK) \Rightarrow BC \perp SI$

c) Tam giác SIK có $SO = \frac{a}{2} = \frac{IK}{2}$ nên là tam giác vuông tại S.

$\left.\begin{matrix} SI \perp BC \\ SI \perp SK \end{matrix}\right\} \Rightarrow SI \perp (SBC)$ mà $SI \subset (SAD) \Rightarrow (SAD) \perp (SBC)$.

3.3 Áp dụng định lí Pitago ta có :

$$AN^2 = AD^2 + DN^2 = \frac{25a^2}{4}$$

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$MN^2 = CM^2 + CN^2 = \frac{5a^2}{16}$$

Do đó : $AN^2 = AM^2 + MN^2$, ta suy ra tam giác AMN vuông tại M.

$$\left.\begin{matrix} MN \perp AM \\ MN \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN \perp (SAM) \Rightarrow (SMN) \perp (SAM).$$

3.4 a) $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$. Dựng $OM \perp SC$ ta có OH là đoạn vuông góc chung của SC và BD.

$$\frac{OH}{SA}=\frac{OC}{SC}\Rightarrow OH=\frac{SA.OC}{SC}=\frac{a.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$$

b) Qua D dựng đường thẳng d // AC, ta có AC // mp(S, d) nên d(AC, SD) = d(A, (S, d)). Vẽ AI ⊥ d tại I, AE ⊥ SI tại E, ta có SE là độ dài đoạn vuông góc chung. Tứ giác AIDO là hình vuông nên AI = DO = $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3}{a^2}\Rightarrow AE=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

3.5 a) $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC.BD=\frac{1}{2}a\sqrt{2}.a=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Vì AB'C'D' là hình vuông nên $S_{AB'D'C'}=\frac{1}{2}B'D'^2$. Góc vuông $\widehat{AOD}$ có hình chiếu là góc vuông $\widehat{AO'D'}$ trên (α) nên có OD // O'D'. Tương tự ta có OB // O'B'. Do đó DB // D'B' ta suy ra B'D' = BD = a.

b) Ta tính được $S_{AB'C'D'}=\frac{1}{2}a^2$. Do đó :

$$\cos\varphi=\frac{S_{AB'C'D'}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a^2\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\varphi=45^0$$

c) Ta có EF = 2BD = 2a.

EFDB là hình thang có AO là đường cao nên :

$$S_{EFDB}=\frac{1}{2}AO(EF+BD)=\frac{1}{2}\frac{1}{2}AC(EF+BD)=\frac{1}{4}a\sqrt{2}(2a+a)=\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$$

$$S_{EFD'B'}=S_{EFDB}.\cos 45^0=\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3a^2}{4}$$

3.6 a) AB // CD ⇒ $(\widehat{AB,CC})=\widehat{SCD}$. Vì tam giác SCD vuông tại D nên

$$\tan\widehat{SCD}=\frac{SD}{CD}=\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}.$$

Muốn $\widehat{SCD} = 60^\circ$ thì

$$\tan\widehat{SCD} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow h = a\sqrt{2}$$

b) AB // (SCD) $\Rightarrow$ d(AB, SC) = d(A, (SCD)) mà (SCD) $\perp$ (SAB) nên dựng AH $\perp$ SD với H $\in$ SD thì AH $\perp$ (SCD) $\Rightarrow$ AK là khoảng cách giữa AC và SC.

Với hệ thức $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{3}{2a^2}$

Suy ra : $AK^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

c) BD $\perp$ (SAC) $\Rightarrow$ BD $\perp$ SC. Dựng OM $\perp$ SC với M $\in$ SC ta có SC $\perp$ (BMD) do đó $\widehat{BMD}$ là góc phẳng của nhị diện cạnh SC. Tam giác BMD cân đỉnh M nên $\widehat{BMD} = 2\widehat{BMO}$. Cần chứng minh $\widehat{BMO} > 45^\circ$ hay $\tan\widehat{BMO} > 1$. Ta có $\tan\widehat{BMO} = \frac{OB}{OM}$. Trong tam giác vuông OCM ta có OC > OM mà OC = OB nên OB > OM $\Rightarrow \tan\widehat{BMO} > 1 \Rightarrow \widehat{BMD}$ là góc tù.

3.7 a) Vì AB = AC = AD = a nên điểm A thuộc trục đường tròn (BCD) nhận O làm tâm. Do đó AO $\perp$ mp(BCD). Gọi K là trung điểm của CD.

$$BO = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$AO^2 = AB^2 - BO^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

b) Xét tam giác IBO vuông tại O :

$$IB^2 = OI^2 + OB^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{2.3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

Vậy $IB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vì I thuộc trục đường tròn (BCD) nên $IB = IC = ID = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác IBC, ta có :

$BC^2 = a^2$, $IB^2 + IC^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = a$. Vậy IB $\perp$ IC.

Tương tự ta chứng minh được IB $\perp$ ID và IC $\perp$ ID.

3.8 a) Mặt phẳng (BDD'B') $\perp$ AC tại O. Gọi O' là tâm hình vuông A'B'C'D'. Hình chiếu vuông góc của DC' trên (BDD'B') là DO'. Vẽ OH $\perp$ DO', độ dài đoạn OH là độ dài đoạn vuông góc chung của AC và DC'. Từ H vẽ HK // AC với K $\in$ DC' và từ K vẽ KL // OH với L $\in$ AC ta được một đoạn vuông góc chung của AC và DC' là KL.

Ta có KL = OH, mà

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OO'^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2}$$

Suy ra : $OH^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

b) Từ đó BD $\perp$ mp(ACC'A') vì BD $\perp$ AC và BD $\perp$ AA', do đó BD $\perp$ AC'.

BC' $\perp$ mp(A'B'CD) vì BC' $\perp$ B'C và BC' $\perp$ A'B', do đó BC' $\perp$ A'C.

Vậy A'C $\perp$ mp(BDC').

c) Mặt phẳng (GAC) cắt mp(A'B'C'D') theo đoạn giao tuyến MN đi qua G và song song với A'C'. Ta có AM = CN và thiết diện AMNC là hình thang cân có OG là đường cao.

$$S_{(AMNC)} = \frac{1}{2}(AC + MN).OG = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{2} + \frac{2}{3}a\sqrt{3}\right).OG$$

Ta có : $OG^2 = OO'^2 + O'G^2 = a^2 + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{19a^2}{18}$

Suy ra : $OG = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{19}{2}}$.

Ta tính được : $S_{(AMNC)} = \frac{5a^2\sqrt{19}}{18}$.

Phụ lục

TRÍCH GIỚI THIỆU MỘT SỐ ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC (2005 – 2010)

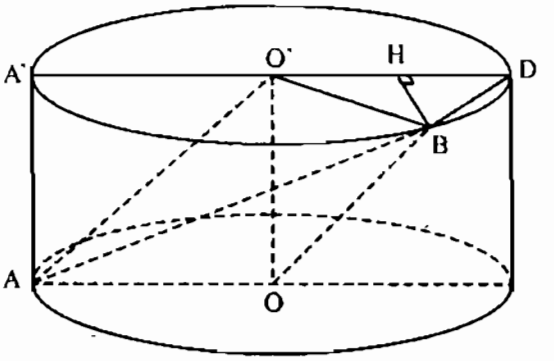
NĂM 2006(*)

ĐỀ THI KHỐI A

Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B sao cho AB = 2a. Tính thể tích của khối tứ diện OO'AB.

Hướng dẫn giải

Kẻ đường sinh AA'. Gọi D là điểm đối xứng với A' qua O' và H là hình chiếu của B trên đường thẳng A'D.



Do BH ⊥ A'D và BH ⊥ AA' nên BH ⊥ (AOO'A').

Suy ra : $V_{OO'AB} = \frac{1}{3}.BH.S_{AOO'}$.

Ta có : $A'B = \sqrt{AB^2 - A'A^2} = \sqrt{3}a \Rightarrow BD = \sqrt{A'D^2 - A'B^2} = a$

(*) Năm 2005, đề thi toán các khối A, B, và D không có phần Hình học không gian.

$\Rightarrow \Delta BO'D$ đều $\Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

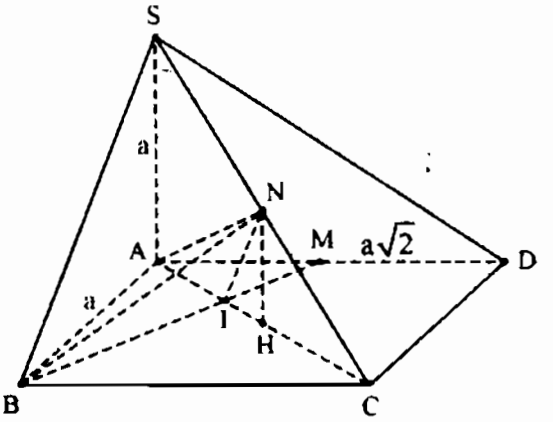
Vì AOO' là tam giác vuông cân cạnh bên bằng a nên : $S_{\Delta OO'} = \frac{1}{2}a^2$.

Vậy thể tích khối tứ diện OO'AB là : $V = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}a}{2}.\frac{a^2}{2} = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

ĐỀ THI KHỐI B

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = $a\sqrt{2}$, SA = a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC ; I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB). Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

Hướng dẫn giải



Xét ΔABM và ΔBCA vuông có $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \Delta ABM$ đồng dạng ΔBCA

$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{BCA} \Rightarrow \widehat{ABM} + \widehat{BAC} = \widehat{BCA} + \widehat{BAC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AIB} = 90^0$

$\Rightarrow MB \perp AC$ (1)

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp MB$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MB \perp (SAC) \Rightarrow (SMB) \perp (SAC)$.

Gọi H là trung điểm của AC $\Rightarrow$ NH là đường trung bình của ΔSAC

$\Rightarrow NH = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$ và NH // SA nên NH ⊥ (ABI), do đó $V_{ANIB} = \frac{1}{3} NH.S_{\Delta ABI}$.

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$BI^2 = AB^2 - AI^2 \Rightarrow BI = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow S_{\Delta ABI} = \frac{a^2\sqrt{2}}{6}$$

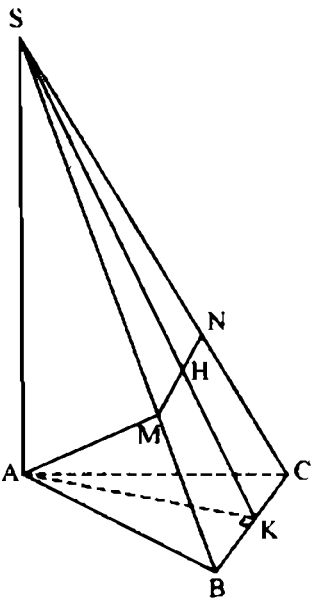
$$\Rightarrow V_{ANIB} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}.$$

ĐỀ THI KHỐI D

Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA = 2a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính thể tích của khối chóp A.BCNM.

Hướng dẫn giải

Gọi K là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của A trên SK.



Do BC ⊥ AK, BC ⊥ SA nên BC ⊥ AH.

Do AH ⊥ SK, AH ⊥ BC nên AH ⊥ (SBC).

Xét tam giác vuông SAK :

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}.$$

Xét tam giác vuông SAB :

$$SA^2 = SM.SB \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{4}{5}.$$

Xét tam giác vuông SAC :

$$SA^2 = SN.SC \Rightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{4}{5}.$$

Suy ra :

$$\frac{S_{SMN}}{S_{SBC}} = \frac{16}{25} \Rightarrow S_{BCNM} = \frac{9}{25} S_{SBC} = \frac{9\sqrt{19}a^2}{100}.$$

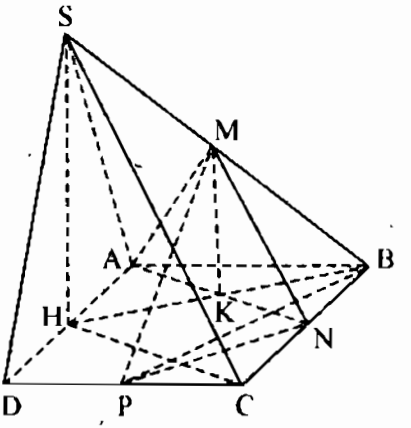
Vậy, thể tích của khối chóp A.BCNM là : $V = \frac{1}{3}.AH.S_{BCNM} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{50}$.

NĂM 2007

ĐỀ THI KHỐI A

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện CMNP.

Hướng dẫn giải



Gọi H là trung điểm của AD.

Do ΔSAD đều nên SH ⊥ AD.

Do (SAD) ⊥ (ABCD) nên SH ⊥ (ABCD) ⇒ SH ⊥ BP (1).

Xét hình vuông ABCD ta có ΔCDH = ΔBCP ⇒ CH ⊥ BP (2). Từ (1) và (2) suy ra BP ⊥ (SHC).

Vì MN // SC và AN // CH nên (AMN) // (SHC).

Suy ra BP ⊥ (AMN) ⇒ BP ⊥ AM.

Kẻ MK ⊥ (ABCD), K ∈ (ABCD). Ta có : $V_{CMNP} = \frac{1}{3}MK.S_{CNP}$.

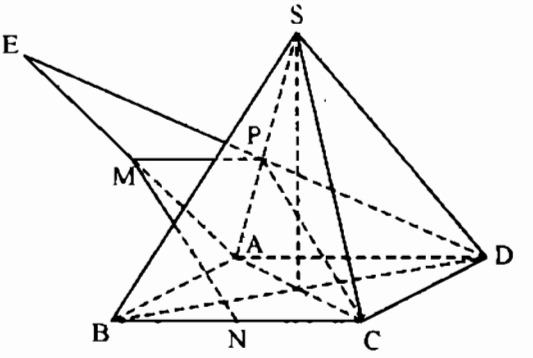
Vì $MK = \frac{1}{2}SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, $S_{CNP} = \frac{1}{2}CN.CP = \frac{a^2}{8}$ nên $V_{CMNP} = \frac{\sqrt{3}a^3}{96}$ (đvtt).

ĐỀ THI KHỐI B

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm AE, N là trung điểm BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

Hướng dẫn giải

Gọi P là trung điểm SA. Ta có MNCP là hình bình hành nên MN song song với mặt phẳng (SAC). Mặt khác, BD ⊥ (SAC) nên BD ⊥ MN.



Vì MN // (SAC) nên

$$d(MN\ ;\ AC) = d(N\ ;\ (SAC)) = \frac{1}{2}d(B\ ;\ (SAC)) = \frac{1}{4}BD = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

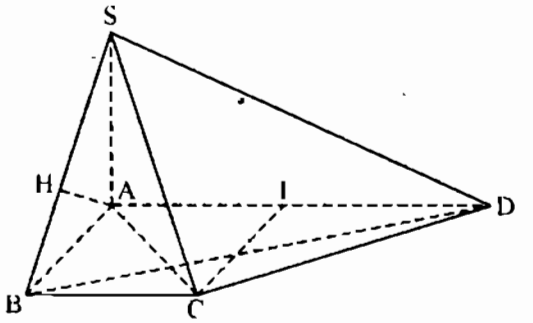
Vậy $d(MN\ ;\ AC) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

ĐỀ THI KHỐI D

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^o$, BA = BC = a, AD = 2a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của AD. Ta có : IA = ID = IC = a $\Rightarrow$ CD $\perp$ AC. Mặt khác, CD $\perp$ SA. Suy ra CD $\perp$ SC nên tam giác SCD vuông tại C.



Trong tam giác vuông SAB ta có : $\frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{2a^2}{2a^2 + a^2} = \frac{2}{3}$

Gọi d_1 và d_2 lần lượt là khoảng cách từ B và H đến mặt phẳng (SCD) thì

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{SH}{SB} = \frac{2}{3} \Rightarrow d_2 = \frac{2}{3}d_1.$$

Ta có : $d_1 = \frac{3V_{B.SCD}}{S_{SCD}} = \frac{SA.S_{BCD}}{S_{SCD}}$.

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{2}a^2.$$

$$S_{SCD} = \frac{1}{2}SC.CD = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AB^2 + BC^2}.\sqrt{IC^2 + ID^2} = a^2\sqrt{2}.$$

Suy ra $d_1 = \frac{a}{2}$.

Vậy khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) là : $d_2 = \frac{2}{3}d_1 = \frac{a}{3}$.

NĂM 2008

ĐỀ THI KHỐI A

Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, AC = $a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A'.ABC và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', B'C'.

Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm của BC.

Suy ra A'H ⊥ (ABC) và

$AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a.$

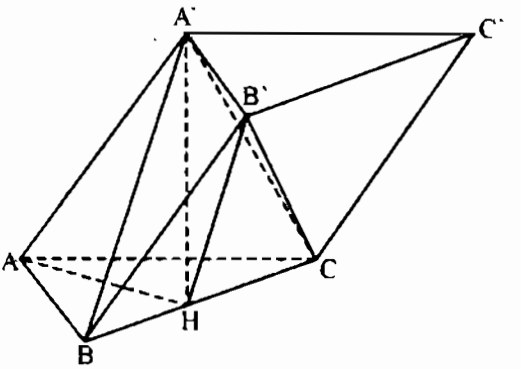
Do đó $A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = 3a^2$

$\Rightarrow A'H = a\sqrt{3}$.

Vậy

$V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{2}$

(đvtt).



Trong tam giác vuông A'B'H có : $HB' = \sqrt{A'B'^2 + A'H^2} = 2a$ nên tam giác B'BH cân tại B'.

Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C' thì $\varphi = \widehat{B'BH}$

Vậy $\cos\varphi = \dfrac{a}{2.2a} = \dfrac{1}{4}$.

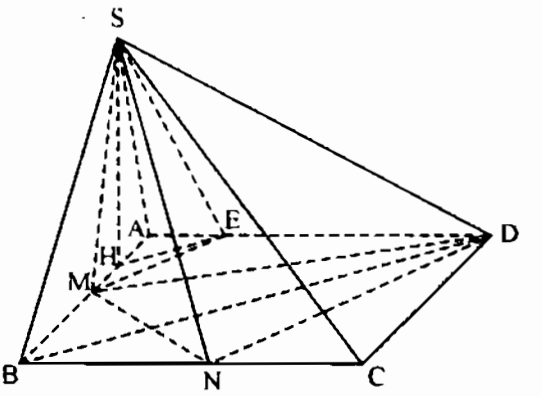
ĐỀ THI KHỐI B

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA = a, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu của S trên AB, suy ra SH ⊥ (ABCD). Do đó SH là đường cao của hình chóp S.BMDN.

Ta có : $SA^2 + SB^2 = a^2 + 3a^2 = AB^2$ nên tam giác SAB vuông tại S, suy ra $SM = \dfrac{AB}{2} = a$. Do đó tam giác SAM đều, suy ra $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Diện tích tứ giác BMDN là $S_{BMDN} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} = 2a^2$.

Thể tích khối chóp S.BMDN là $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{BMDN} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ (đvtt).

Kẻ ME // DN (E ∈ AD) suy ra $AE = \dfrac{a}{2}$. Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng SM và DN. Ta có $(\widehat{SM, ME}) = \varphi$. Theo định lý ba đường vuông góc ta có SA ⊥ AE

Suy ra $SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}, ME = \sqrt{AM^2 + AE^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

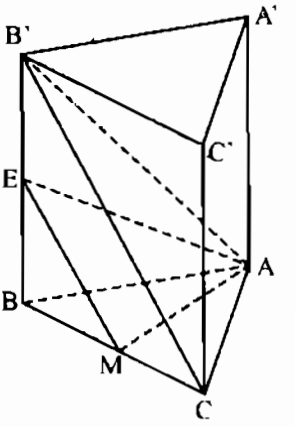
Tam giác SME cân tạ E nên $\widehat{SME} = \varphi$ và $\cos\varphi = \dfrac{\dfrac{a}{2}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

ĐỀ THI KHỐI D

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, AB = BC = a, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông cân tại B.



Thể tích khối lăng trụ là

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = a\sqrt{2}.\frac{1}{2}.a^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3 \text{ (đvtt)}.$$

Gọi E là trung điểm của BB'. Khi đó mặt phẳng (AME) song song với B'C nên khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C bằng khoảng cách giữa B'C và mặt phẳng (AME).

Nhận thấy khoảng cách từ B đến mặt phẳng (AME) bằng khoảng cách từ C đến mặt phẳng (AME).

Gọi h là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (AME).

Do tứ diện BAME có BA, BM, BE đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BE^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng B'C và AM bằng $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

NĂM 2009

ĐỀ THI KHỐI A

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D : AB = AD = 2a ; CD = a ; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD), tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

(Xem hướng dẫn giải của Bài 13, trang 128)

ĐỀ THI KHỐI B

Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có BB' = a, góc giữa đường thẳng BB' và mp(ABC) bằng 60^0 ; tam giác AB (vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện A'ABC theo a.

(Xem hướng dẫn giải của Bài 32, trang 150)

ĐỀ THI KHỐI D

Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a ; AA' = 2a ; A'C = 3a. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính theo a thể tích khối tứ diện I.ABC và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC).

(Xem hướng dẫn giải của Ví dụ 2, trang 111)

NĂM 2010

ĐỀ THI KHỐI A

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD ; H là giao điểm của CN với DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.CDNM và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

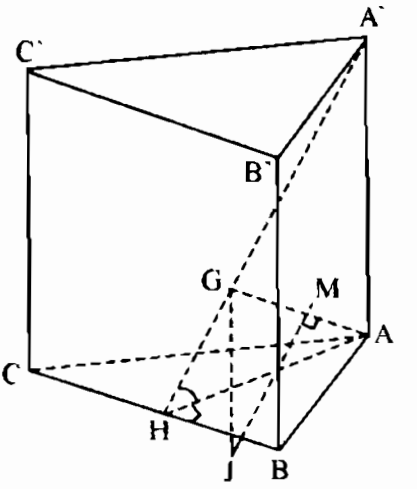
(Xem hướng dẫn giải của Ví dụ 1, trang 110)

ĐỀ THI KHỐI B

Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có AB = a, góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác A'BC. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC theo a.

Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm của BC. Vì ABC là tam giác đều nên $AH \perp BC \Rightarrow \widehat{A'HA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) $\Rightarrow \widehat{A'HA} = 60^0$



Ta có $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vì tam giác vuông A'AH có $\widehat{A'HA} = 60^0$ nên $A'H = 2AH = a\sqrt{3}$ và

$AA' = AH.\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$

Vậy

$$V_{ABC\,A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = \frac{3a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$$

• Gọi I là tâm của tam giác ABC. Ta có $GI // AA' \Rightarrow GI \perp (ABC) \Rightarrow$ Đường thẳng GI là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC ; đường trung trực của GA trong mặt phẳng (A'AH) cắt GI tại O thì O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC.

Gọi M là trung điểm của BC. Ta có :

$$GM.GA = GI.GJ \Rightarrow R = GJ = \frac{GM.GA}{GI} = \frac{\frac{1}{2}GA^2}{GI}$$

Mà $GA^2 = GI^2 + IA^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{21a^2}{36}$ và $GI = \frac{1}{3}AA' = \frac{a}{2}$

Do đó $R = \frac{7a}{12}$.

ĐỀ THI KHỐI D

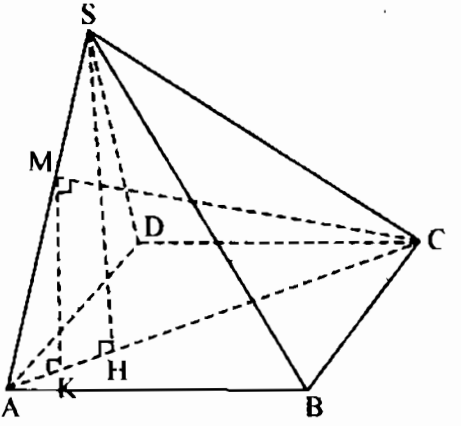
Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn AC, $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC.

Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện SMBC theo a.

Hướng dẫn giải

• Tam giác vuông SHA cho ta :

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$$



Tam giác vuông SHC cho ta :

$$SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \sqrt{\frac{14a^2}{16} + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = a\sqrt{2}$$

Do đó $SC = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta ACS$ cân ở C. Do đó CM còn là trung tuyến, hay M là trung điểm của SA

• Hạ $MK \perp AC (K \in AC)$, ta có $MK = \frac{1}{2}SH = \frac{a\sqrt{14}}{8}$

• $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{14}}{4}.\frac{1}{2}a.a = \frac{a^3\sqrt{14}}{24}$

Vậy $V_{S.MBC} = V_{MABC} = \frac{1}{2}V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}$.

MỤC LỤC

Lời nói đầu.. 3
Cấu trúc đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng 2009, môn Toán 5

Phần I.

KIẾN THỨC CƠ BẢN – VÍ DỤ ÁP DỤNG

Chương 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG 7

§ 1. Các tiên đề, vị trí tương đối của điểm, đường thẳng, mặt phẳng hình chóp và thiết diện 7
A. Kiến thức cơ bản 7
B. Ví dụ áp dụng 10
Dạng 1. Sử dụng các tiên đề và xét vị trí tương đối của điểm, đường thẳng, mặt phẳng 10
Dạng 2. Tìm giao điểm của hai mặt phẳng 12
Dạng 3. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng 16
Dạng 4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy 19
Dạng 5. Tìm tập hợp giao điểm của hai đường thẳng di động 22
Dạng 6. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng 26
C. Luyện tập 29

Chương 2. QUAN HỆ SONG SONG 31

§ 2. Hai đường thẳng song song 31
A. Kiến thức cơ bản 31
B. Ví dụ áp dụng 32
Dạng 1. Chứng minh hai đường thẳng song song a và b 32
Dạng 2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng 34
§ 3. Đường thẳng và mặt phẳng song song 36
A. Kiến thức cơ bản 36
B. Ví dụ áp dụng 37

Dạng 1. Chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) 37
Dạng 2. Tìm thiết diện song song với một đường thẳng cho trước 39
§ 4. Hai mặt phẳng song song 41
A. Kiến thức cơ bản 41
B. Ví dụ áp dụng 42
Dạng 1. Chứng minh hai mặt phẳng song song 42
Dạng 2. Xác định thiết diện của một mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước 44
§ 5. Ba mặt phẳng song song 46
A. Kiến thức cơ bản 46
B. Ví dụ áp dụng 46
Dạng 1. Sử dụng các mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tỉ lệ 46
Dạng 2. Cho hai điểm M, N di động trên hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Tìm tập hợp những điểm I chia đoạn MN theo một tỉ số k cho trước (chia trong hoặc chia ngoài) 48
§ 6. Hình lăng trụ và hình hộp 50
A. Kiến thức cơ bản 50
B. Ví dụ áp dụng 51
Dạng 1. Sử dụng định nghĩa và các tính chất của hình lăng trụ 51
Dạng 2. Thiết diện của lăng trụ 53
§ 7. Phép chiếu song song. Hình biểu diễn của một hình không gian 55
A. Kiến thức cơ bản 55
B. Ví dụ áp dụng 57
Dạng 1. Tìm phép chiếu song song của một hình cho trước thoả mãn một số điều kiện cho trước 57
Dạng 2. Vẽ hình chiếu của một hình không gian 58
C. Luyện tập 59
Chương 3. QUAN HỆ VUÔNG GÓC 61
§ 8. Hai đường thẳng vuông góc 61
A. Kiến thức cơ bản 61
B. Ví dụ áp dụng 62

Dạng 1. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau trong không gian 62
Dạng 2. Tính góc của hai đường thẳng trong không gian 63
§ 9. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng 63
A. Kiến thức cơ bản 63
B. Ví dụ áp dụng 66
Dạng 1. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng 66
Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau 68
Dạng 3. Tìm thiết diện qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước 73
§ 10. Hai mặt phẳng vuông góc 75
A. Kiến thức cơ bản 75
B. Ví dụ áp dụng 76
Dạng 1. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc 76
Dạng 2. Xác định mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và vuông góc với một mặt phẳng (Q) đã cho, biết rằng a không vuông góc với (Q) 79
§ 11. Khoảng cách 81
A. Kiến thức cơ bản 81
B. Ví dụ áp dụng 83
Dạng 1. Xác định đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau 83
Dạng 2. Tính khoảng cách giữa :
– đường thẳng và mặt phẳng song song với đường thẳng đó,
– Hai mặt phẳng song song 86
§ 12. Góc 92
C. Luyện tập 93
Chương 4. MẶT CẦU VÀ MẶT TRÒN XOAY 95
§ 13. Mặt cầu 95
A. Kiến thức cơ bản 95
B. Ví dụ áp dụng 97
Dạng 1. Xác định mặt cầu và chứng minh một điểm M luôn luôn thuộc mặt cầu đó 97

Dạng 2. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp 98
Dạng 3. Mặt cầu nội tiếp hình chóp 100
Dạng 4. Mặt cầu thay đổi nhưng luôn chứa một đường tròn cố định 102
§ 14. Mặt trụ tròn xoay – Mặt nón tròn xoay 103
A. Kiến thức cơ bản 103
B. Ví dụ áp dụng 105
Chương 5. DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH 107
A. Kiến thức cơ bản 107
§ 15. Diện tích các hình đa diện 107
§ 16. Thể tích của khối đa diện 107
§ 17. Diện tích và thể tích của hình tròn xoay 108
§ 18. Một số kiến thức bổ sung 108
B. Ví dụ áp dụng 110

Phần II.

ÔN TẬP – HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. Bài tập tự luận 113
2. Bài tập trắc nghiệm 159
3. Hướng dẫn giải - Đáp số 179

Phụ lục. TRÍCH GIỚI THIỆU MỘT SỐ ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC (2005 – 2010) 185

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chu tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Chịu trách nhiệm nội dung :
Phó Tổng Giám đốc kiêm Giám đốc NXBGD tại Tp. Đà Nẵng HUỲNH BÁ VÂN
Phó Tổng biên tập HUỲNH THÔNG

Biên tập lần đầu :
TRẦN PHƯỚC CHƯƠNG

Biên tập tái bản :
ĐẶNG VĂN TRÍ

Trình bày bìa :
MINH THƯ

Đơn vị liên doanh in và phát hành :
TRUNG TÂM SÁCH KHUYẾN HỌC PHÍA NAM

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI VÀO ĐẠI HỌC
HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
Mã số : PTK24t0 – LKT

In 1.500 bản, khổ 16 x 24 cm. Tại **CÔNG TY CỔ PHẦN IN KHUYẾN HỌC PHÍA NAM,** Tp. HCM. Số QĐ xuất bản: **2430/QĐ-GD,** ngày 17.12.2010.Số ĐKKHXB: **114-2010/CXB/176-129/GD**. In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2011.

SÁCH THAM KHẢO MÔN TOÁN, LÍ, HOÁ DÀNH CHO HỌC SINH LỚP 12, ÔN THI VÀO ĐẠI HỌC

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC - MÔN TOÁN (7 TẬP)

Tác giả : TRẦN VĂN HẠO (Chủ biên)

- ĐẠI SỐ
- GIẢI TÍCH - ĐẠI SỐ TỔ HỢP
- BẤT ĐẲNG THỨC
- KHẢO SÁT HÀM SỐ
- LƯỢNG GIÁC
- HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
- HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC - MÔN VẬT LÍ (3 TẬP)

Tác giả : NGUYỄN THANH HẢI

- ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN, DAO ĐỘNG CƠ HỌC, SÓNG CƠ
- DAO ĐỘNG ĐIỆN TỪ, DÒNG ĐIỆN XOAY CHIỀU
- SÓNG ÁNH SÁNG, LƯỢNG TỬ ÁNH SÁNG, SƠ LƯỢC VỀ THUYẾT TƯƠNG ĐỐI HẸP, HẠT NHÂN NGUYÊN TỬ, TỪ VI MÔ ĐẾN VĨ MÔ

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC - MÔN HOÁ (2 TẬP)

Tác giả : NGÔ NGỌC AN

- HOÁ HỮU CƠ
- HOÁ VÔ CƠ

TRUNG TÂM SÁCH KHUYẾN HỌC PHÍA NAM ẤN HÀNH

Số 41, đường 41, P. Thảo Điền, Quận 2 - TP. Hồ Chí Minh

Điện thoại : 08.38251527 - 08.38035929 Fax : 08.38227758

SKH

www.netbook.vn

CDLTĐH Hình Học Không Gian

8 935091 911473

Giá : 29.000 đ